Grado 10

Matemáticas - Unidad 2

La trigonometría, un estudio de la medida del ángulo a través de las funciones.

Tema

Caracterización de las razones trigonométricas

Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)	**Grado 10:** **UoL2:** La trigonometría, un estudio de la medida del ángulo a través de las funciones **LO1:** Identificación de propiedades de triángulos **Grado 10:** **UoL2:** La trigonometría, un estudio de la medida del ángulo a través de las funciones **LO2:** Identificación de ángulos y su medición. **Materiales necesarios para la clase:** • Regla • Escuadra • Transportador • Compás • Papel Cuadriculado • Espejo • Calculadora
Objetivos de aprendizaje	• Describir en un triángulo rectángulo las razones trigonométricas • Reconocer la circunferencia unitaria como una herramienta para el estudio de la trigonometría. • Identificar el coseno como una razón entre dos magnitudes • Identificar el seno como una razón entre dos magnitudes. • Identificar la tangente como una razón entre dos magnitudes • Identificar la cotangente como una razón entre dos magnitudes • Identificar la secante como una razón entre dos magnitudes • Identificar la cosecante como una razón entre dos magnitudes • Encontrar los valores de las razones trigonométricas para ángulos construibles.
Habilidad / Conocimiento (H/C)	**SCO 1: Descripción de la circunferencia unitaria y su utilidad en la trigonometría.** 1. Investiga la historia de la trigonometría y sus aportes a la humanidad. 2. Establece la importancia de la trigonometría en su entorno. 3. Distingue la circunferencia unitaria como una referencia para medir ángulos en radianes en el plano coordenado. 4. Ubica ángulos en el plano con vértice en el origen y lado inicial sobre el eje X. 5. Construye triángulos rectángulos cuyos vértices son el origen un punto de la circunferencia unitaria y un punto de eje X o Y.

SCO 2: Describe la razón trigonométrica coseno.

6. Relaciona el coseno de un ángulo con la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria.
7. Reconoce el coseno como un número real acotado entre -1 y 1.
8. Interpreta el coseno como una razón entre el cateto adyacente a un ángulo de un triángulo rectángulo y la hipotenusa.
9. Establece argumentos geométricos para interpretar el coseno como una razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

SCO 3: Describe la razón trigonométrica seno.

10. Interpreta el seno de un ángulo como la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria.
11. Reconoce el seno como un número real acotado entre -1 y 1.
12. Interpreta el seno como una razón entre el cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo y la hipotenusa.
13. Establece argumentos geométricos para interpretar el seno como una razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

SCO 4: Describe la razón trigonométrica tangente.

14. Interpreta la tangente como una razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto a un ángulo de un triángulo rectángulo.
15. Reconoce la tangente como el cociente entre el seno y el coseno de un determinado ángulo.
16. Identifica la tangente como el cociente entre la abscisa y la ordenada de la coordenada de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen.
17. Deduce que la tangente no está acotada por ningún valor.
18. Establece que la tangente no está definida para ciertos ángulos.
19. Generaliza los valores de los ángulos para los cuales no está definida la tangente.

SCO 5: Identifica la razón trigonométrica cotangente.

20. Interpreta la cotangente como una razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto respecto a un ángulo de un triángulo rectángulo
21. Reconoce la cotangente como el cociente entre el coseno y el seno de un determinado ángulo.
22. Identifica la tangente como el cociente entre la ordenada y la abscisa de las coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen.
23. Deduce que la cotangente no está acotada por ningún valor.
24. Establece que la cotangente no está definida para ciertos ángulos.
25. Generaliza los valores de los ángulos para los cuales no está definida la cotangente.

SCO 6: Identifica la razón trigonométrica secante.

26. Interpreta la secante como una razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto opuesto a un ángulo.
27. Reconoce la secante como el inverso multiplicativo de la razón coseno.
28. Identifica la secante como el inverso multiplicativo de la abscisa de las coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen.
29. Deduce que la secante no está acotada por algún valor.
30. Determina los valores de los ángulos para los cuales está definida la secante.
31. Generaliza los valores de los ángulos para los cuales no está definida la secante.

SCO 7: Identifica la razón trigonométrica cosecante.

32. Interpreta la cosecante como una razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto adyacente a un ángulo.
33. Reconoce la cosecante como el inverso multiplicativo de la razón seno.
34. Identifica la secante como el inverso multiplicativo de la ordenada de las coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen.
35. Deduce que la cosecante no está acotada por algún valor.
36. Determina que la cosecante no toma valores entre -1 y 1.
37. Establece los valores de los ángulos para los cuales no está definida la cosecante.
38. Generaliza los valores de los ángulos para los cuales no está definida la cosecante.

SCO 8: Encuentra razones trigonométricas para ángulos notables construibles.

39. Relaciona la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para definir las razones trigonométricas.
40. Identifica los ángulos notables construibles.
41. Encuentra el valor de las razones seno y coseno para ángulos de 45 haciendo uso de los teoremas del triángulo isósceles y Pitágoras.
42. Encuentra el valor de las razones seno y coseno para ángulos de 30 haciendo uso de los teoremas 30-60-90 y Pitágoras.
43. Encuentra el valor de las razones seno y coseno para ángulos de 60 haciendo uso de los teoremas 30-60-90 y Pitágoras.
44. Encuentra el valor de las razones seno y coseno para ángulos mayores a 90 haciendo uso de los ángulos complementarios.
45. Encuentra el valor de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para ángulos notables construibles.
46. Establece regularidades en el cálculo de razones trigonométricas de ángulos notables.

Flujo de aprendizaje

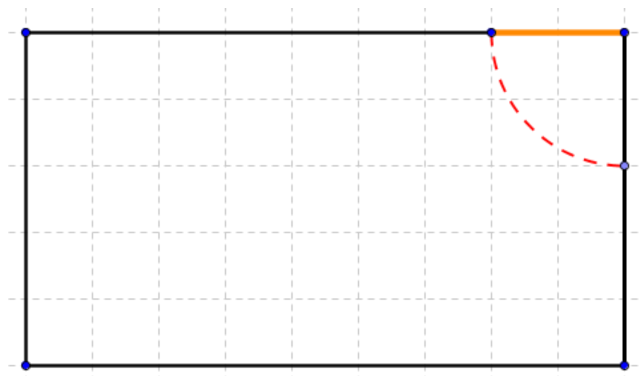
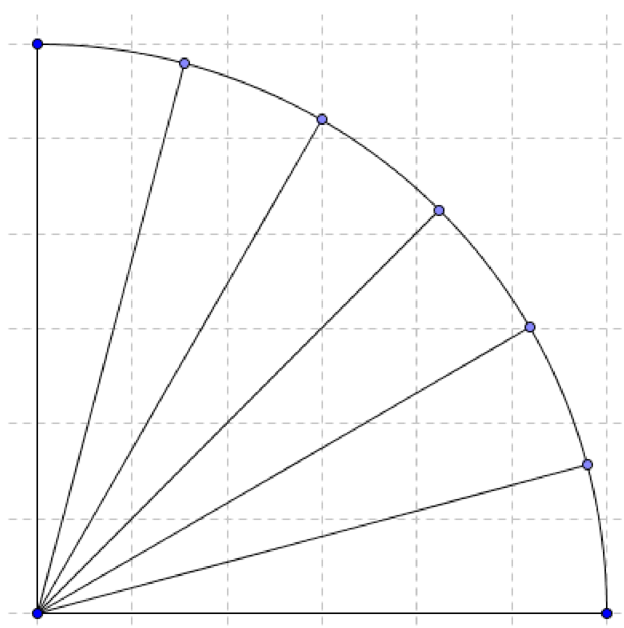
1. **Introducción:** Un poco de historia sobre los orígenes de la trigonometría. (H/C 1, H/C 2)
2. **Objetivos de aprendizaje.**
3. **Desarrollo:**
   - **3.1. Actividad 1:** "María va, maría viene y en el mismo punto se mantiene" (La puerta del salón de clases). (H/C 3, H/C 4)
   - **3.2. Actividad 2:** Medición de las proyecciones de la puerta en la pared sobre la cual descansa la puerta cerrada y en la pared que recibe la puerta abierta. (H/C 5)
   - **3.3. Actividad 3:** Definición de las seis razones trigonométricas a partir de las mediciones realizadas con la puerta (H/C 6, H/C 7, H/C 8, H/C 9 H/C 10, H/C 11, H/C 12, H/C 13, H/C 14, H/C 15, H/C 16, H/C 17, H/C 18, H/C 19, H/C 20, H/C 21, H/C 22, H/C 23, H/C 24, H/C 25, H/C 26, H/C 27, H/C 28, H/C 29, H/C 30, H/C 31, H/C 32, H/C 33, H/C 34, H/C 35, H/C 36, H/C 37, H/C 38)
   - **3.4. Actividad 4:** Deducción de las razones trigonométricas exactas para ángulos notables en un triángulo rectángulo (H/C39, H/C 40, H/C 41, H/C 42, H/C 43, H/C 44, H/C 45, H/C 46)
4. **Resumen:** Afinación de conceptos y extrapolación a otros contextos.
5. **Tarea**

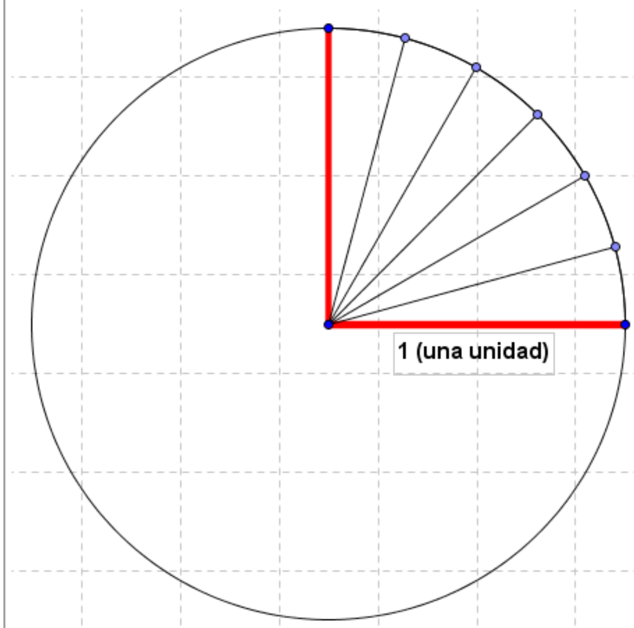
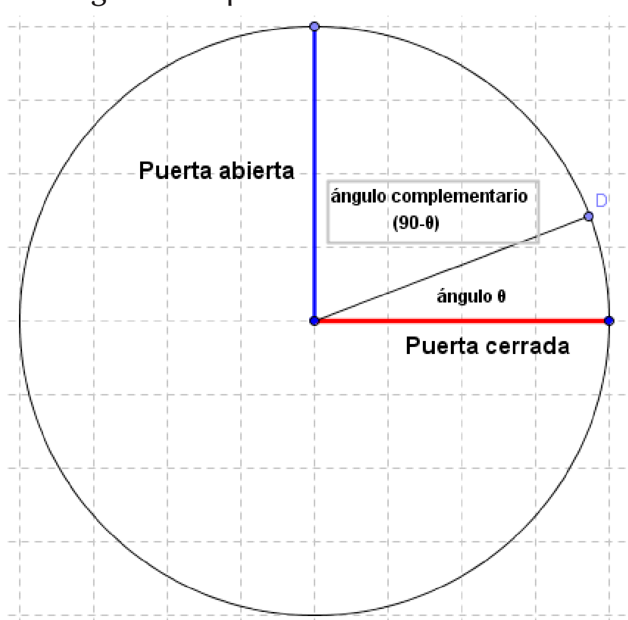
Lineamientos evaluativos

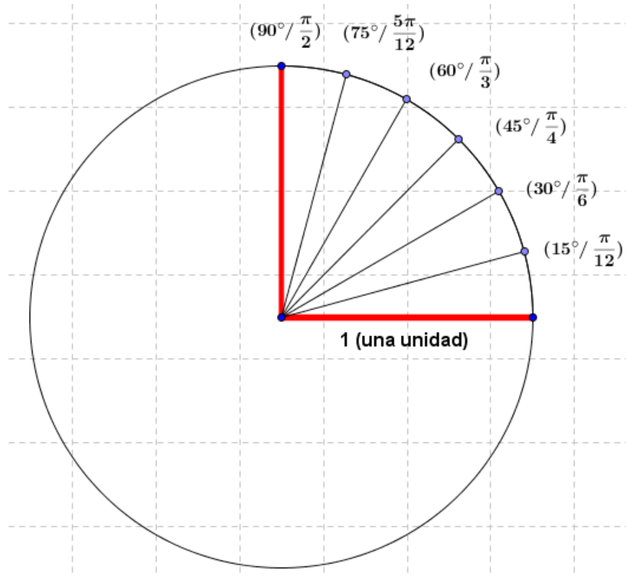
Se espera que los estudiantes identifiquen las razones trigonométricas como razones entre dos magnitudes en el triángulo rectángulo, del mismo modo, deberán reconocer sus limitaciones a nivel de rango y dominio a partir del trabajo con la circunferencia unitaria. Podrán también determinar los valores de las razones trigonométricas para ángulos construibles.
Finalmente podrán hacer sus primeras elucubraciones sobre la aplicación de dichas razones en algunos contextos reales.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Introducción	**Introducción**	El docente presenta un video motivacional sobre la historia de la trigonometría.	**VIDEO** Tomar como referencia el siguiente: en el link **www.youtube.com/watch?v=D3YU9MaCmWc.**
		Luego, en conjunto con los estudiantes, plantea las preguntas orientadoras y de interpretación. (H/C 1, H/C 2) **Preguntas orientadoras y de interpretación.** 1. ¿Qué estudia la trigonometría? 2. ¿Quién es llamado el padre de la trigonometría? Haga una breve	**Texto**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		biografía referenciando otros personajes construyendo una línea de tiempo. 3. En general, ¿para qué se usa la trigonometría y en qué áreas de la ciencia se aplica?	
Objetivos		**Objetivos de aprendizaje** El docente, en compañía de los estudiantes, escribe los objetivos a los que creen que se debe llegar. Luego, el docente presenta los objetivos propuestos para este objeto de aprendizaje. Es importante que el docente explique los objetivos propuestos, pues a partir de estos los estudiantes reconocerán la finalidad del objeto de aprendizaje.	
Contenido	El docente presenta el tema	**Actividad 1: La puerta del salón de clases: "María va, maría viene y en el mismo punto se mantiene". (H/C 3, H/C 4)** El docente usando el recurso interactivo de la puerta explica en que consiste la actividad a realizar en el salón de clase.	**Recurso Interactivo** (se sugiere realizar animación de una puerta que abra y cierre un cuarto de vuelta)
		Por medio de esta actividad los estudiantes realizarán la construcción de un cuarto de círculo aprovechando la puerta del salón de clase, realizarán mediciones de los ángulos que define la puerta al rotar sobre sus bisagras y construirán triángulos rectángulos a partir de las diferentes posiciones que puede tomar la puerta. Utilizando la regla, los estudiantes deberán dibujar con ayuda del docente un plano del salón de clases colocando la puerta de entrada del salón de tal manera que se muestre con un segmento el ancho de la puerta, de este modo, cuando la puerta está cerrada está sobre la línea de la pared que contiene la puerta y cuando	**Material del estudiante**

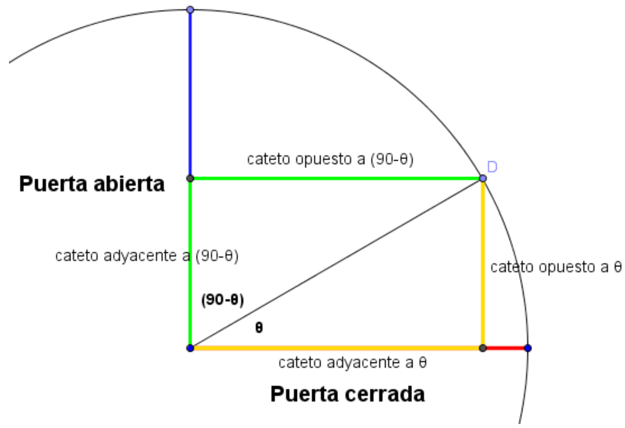
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		está completamente abierta, que da contra la otra pared perpendicular a la que contiene la puerta. Usando el compás podrán pintar el recorrido que hace la puerta al abrirse y cerrarse. 	
		El docente solicita a los estudiantes que coloquen tiza en el extremo libre de la puerta que da al piso de manera que al rotar la misma (abriendo o cerrando la puerta) la tiza marque en el piso un arco (un cuarto de circunferencia) sobre el cual los estudiantes hacen marcas cada 15°; la medición de los ángulos la harán con transportador. 	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		En este momento del trabajo, el docente define la medida de la puerta (su longitud) como una unidad y nomina el sector trazado como una cuarta parte de una circunferencia llamada "circunferencia unitaria" en razón a que su radio es una unidad, en este caso, una puerta.  Es importante medir los ángulos teniendo como lado inicial de dicho ángulo la recta que contiene la puerta cerrada, por supuesto se podrá determinar fácilmente su ángulo complementario.  	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		En cada una de las marcas hechas sobre el arco que describe la puerta se podrán escribir los valores de los ángulos y sus equivalencias en radianes. 	
		En la siguiente expresión que se coloca en el material del estudiante y en un recurso interactivo, para que el estudiante complemente los espacios que aparezcan en blanco(mostrado aquí en color rojo), con el fin de comprobar y afianzar los objetivos de aprendizaje El coseno de un ángulo es la razón entre el cateto adyacente a un ángulo de un triángulo rectángulo y la hipotenusa y es la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria.	**Material del estudiante** **Recurso interactivo** donde aparece en blanco lo colocado en rojo, para que los estudiantes completen
		Actividad 2: Medición de las proyecciones de la puerta sobre la pared sobre la cual descansa la puerta cerrada y sobre la pared que recibe la puerta abierta (H/C 5) El docente presenta a los estudiantes un recurso interactivo usando Geogebra, donde aparezca un triángulo rectángulo dentro de una circunferencia, el cual a medida que se vaya desplazando uno de los puntos de él sobre la circunferencia,	**Recurso interactivo de geogebra**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		van cambiando las medidas de los ángulos y de los lados del triángulo. Luego los estudiantes en compañía del docente verifican algunos elementos descritos aquí para continuar con las mediciones de las proyecciones de la puerta; a partir de las marcas hechas por los estudiantes sobre el arco dibujado en el piso descrito por la puerta para ángulos de 15°, 30°, 45°, 60° y 75° (debe entenderse 0° como la puerta cerrada y 90° como la puerta abierta totalmente) el docente construye con los estudiantes un triángulo rectángulo en una de las posiciones de la puerta, con la puerta misma y sus proyecciones sobre ambas paredes explicando además que este hecho se repite en todas las posiciones diferentes a 0° (puerta cerrada) y 90° (puerta totalmente abierta, en el caso que sea posible).	
		El estudiante de manera individual realiza las siguientes consignas. 1. Haciendo uso de la puerta del salón, construyamos las proyecciones de la puerta sobre las paredes. 2. Marca en el piso con una tiza de color los catetos del triángulo rectángulo formado por la puesta. 3. Dibuja un triángulo rectángulo de distinto valor de ángulo en tu material del estudiante, y resalta las proyecciones en los ejes. 4. Identifica en tu dibujo los lados del triángulo (cateto adyacente y opuesto al ángulo principal).	
		El docente a partir de la producción del estudiante podrá definir los nombres de ambos catetos del triángulo como cateto adyacente y cateto opuesto. Es importante mencionar que dicha clasificación de los catetos es relativa al ángulo medido entre la puerta y una u otra pared.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados



Material del estudiante

El docente podrá manipular la puerta de tal forma que al seleccionar una o más posiciones de la puerta (ángulos) se muestren los cambios en los valores de las magnitudes de las proyecciones.

- En el material del estudiante los estudiantes anotarán los valores de las proyecciones en cada una de las posiciones de la puerta en un cuadro previamente diseñado para tal fin.

Cuadro 1

Ángulo	L.P.	$L.P_x$	$L.P_y$
$0° = 0$			
$15° = \pi/12$			
$30° = \pi/6$			
$45° = \pi/4$			
$60° = \pi/3$			
$75° = 5\pi/12$			
$90° = \pi/2$			

Recurso interactivo con aplicativo del Geogebra(sin las razones trigonométricas)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		L.P.= Longitud de la puerta. **L.P_x.**= Longitud de la proyección sobre la pared que contiene la puerta cerrada. **L.P_y.**= Longitud de la proyección sobre la pared que contiene la puerta totalmente abierta.	
		El docente validará los resultados por medio de la socialización de estos con el resto del grupo de clase. Debe enfatizar en que por ser proyecciones nunca serán los valores mayores a la medida del largo de la puerta (unidad elegida).	
		Actividad 3: Definición de las seis razones trigonométricas a partir de las mediciones hechas con la puerta. (H/C 6, H/C 7, H/C 8, H/C 9 H/C 10, H/C 11, H/C 12, H/C 13, H/C 14, H/C 15, H/C 16, H/C 17, H/C 18, H/C 19, H/C 20, H/C 21, H/C 22, H/C 23, H/C 24, H/C 25, H/C 26, H/C 27, H/C 28, H/C 29, H/C 30, H/C 31, H/C 32, H/C 33, H/C 34, H/C 35, H/C 36, H/C 37, H/C 38) El docente proyecta de nuevo el recurso interactivo con aplicativo del Geogebra para que se identifiquen los ángulos de cada triángulo rectángulos con sus respectivos lados y así los estudiantes se formen una idea del siguiente paso: Retomando el cuadro 1, el docente estandariza la longitud de la puerta como una unidad, luego la longitud de la proyección sobre la pared que contiene la puerta cerrada estandarizada L.P_x.E. como el cociente de $L.P_x. / L.P$ y la longitud de la proyección sobre la pared que contiene la puerta totalmente abierta estandarizada L.Py.E. Como el cociente de $L.P_y. / L.P$ El docente explica con un ejemplo esta estandarización, para que el estudiante llene el cuadro siguiente que está en el material del estudiante.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados

Ejemplo:

L.P.= 80cms
$L.P_x.$=40cms
$L.P_y.$=69.28cms

Realizando la estandarización quedaría:

L.P.E= 1
$L.P_x.E.$= 0.5
$L.P_y.E.$= 0.866

Cuadro 2

Ángulo	L.P.E	$L.P_x.E.$	$L.P_y.E.$
$0° = 0$	1		
$15° = \pi/12$	1		
$30° = \pi/6$	1		
$45° = \pi/4$	1		
$60° = \pi/3$	1		
$75° = 5\pi/12$	1		
$90° = \pi/2$	1		

Los estudiantes al llenar todo el cuadro que se propuso para estandarizar las medidas tomadas por ellos con la rotación de la puerta y relacionando con temas anteriores ya vistos sobre ángulos, extiende con la ayuda del docente a los otros tres cuartos de circunferencia lo sucedido en el primer cuarto de la circunferencia unitaria, teniendo en cuenta que se estandarizó las medidas tomadas por los estudiantes en el ejercicio de la puerta, donde se colocó como ese radio de magnitud uno.

El docente debe enfatizar que las estandarizaciones desarrolladas permiten relacionarlo con lo que se conoce como catetos adyacente y opuesto.

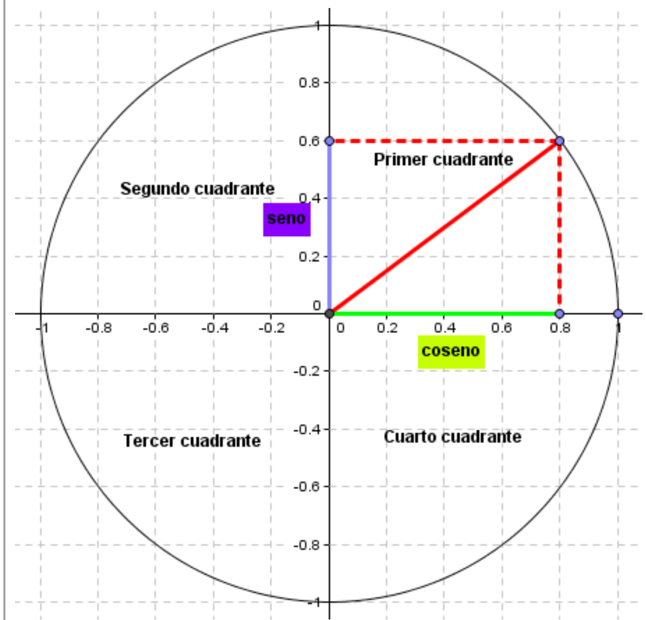
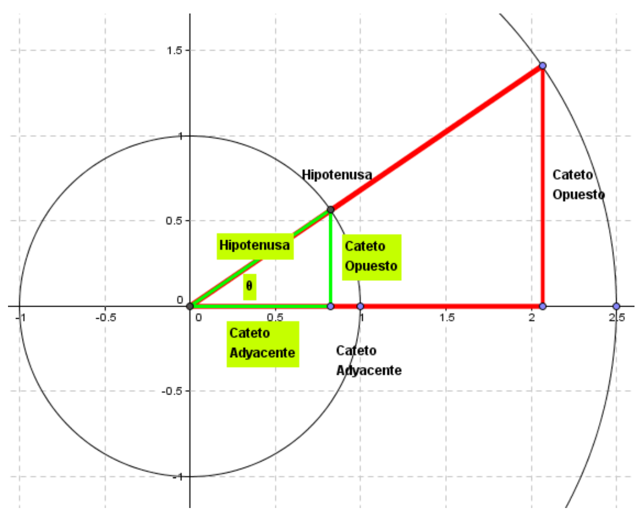
El docente presenta el recurso de Geogebra en la cual se muestra la variación del ángulo cada 15°, y se presenta inicialmente

Recurso interactivo de Geogebra(solo con coseno)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		la generalización de la subdivisión para los 4 cuadrantes, al activar las proyecciones y la tabla de valores se debe enfatizar en la relación que hay entre las proyecciones y el radio para dar cuenta de las relaciones trigonométricas. Con la ayuda del cuadro estandarizado y la información presentada en el recurso, los estudiantes concluyen que la proyección en el eje "*x*" con relación a la variación de los ángulos del cuadro recibe el nombre de cateto adyacente al ángulo tomado y que la proyección en el eje "*y*" recibe el nombre de cateto opuesto al ángulo tomado y que la hipotenusa es la magnitud definida como unidad. Los estudiantes, en el material del estudiante, deben llenar el siguiente cuadro: **Hipotenusa**= h **Cateto adyacente**= c.a. **Cateto opuesto**= c.o. **Cuadro 3**	

Ángulo	h	c.a.	c.o.
0	1		
$\pi/12$	1		
$\pi/6$	1		
$\pi/4$	1		
$\pi/3$	1		
$5\pi/12$	1		
$\pi/2$	1		

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		El docente define el **coseno** como una razón entre el cateto adyacente a un ángulo de un triángulo rectángulo y la hipotenusa.	
		Los estudiantes realizan las siguientes preguntas orientadoras al observar los diferentes catetos adyacentes de los diferentes triángulos rectángulos que se dibujaron **(momento 2 en el aplicativo Geogebra en cateto adyacente):** 1. ¿Cuál es el resultado máximo del cateto adyacente en el primer cuadrante? 2. ¿Cuál es el resultado mínimo del cateto adyacente en el primer cuadrante? 3. ¿Cuál es el resultado máximo y mínimo del cateto adyacente en los demás cuadrantes? 4. ¿Con qué se relaciona el coseno de un ángulo del triángulo rectángulo que se forma con un punto cualquiera de la circunferencia unitaria? 5. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el coseno de un ángulo cualquiera del triángulo rectángulo en la circunferencia unitaria? Al observar los valores que tomaron los diferentes catetos adyacentes de los diferentes triángulos rectángulos que se dibujaron, tienen como magnitud mínima 0 y como magnitud máxima 1, en el primer cuarto de circunferencia (llamado también **primer cuadrante**), luego en el segundo cuarto de circunferencia (llamado también **segundo cuadrante**), y así en tercer cuarto de circunferencia (también llamado **tercer cuadrante**), y luego en el **cuarto cuadrante**; así se concluye que el coseno de un ángulo se relaciona con la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria. Al extender la situación por todo el eje de las x, los estudiantes deben reconocer el coseno como un número real acotado entre -1 y 1.	**Recurso interactivo de Geogebra**(solo con seno)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		 Con la ayuda del docente los estudiantes establecen argumentos geométricos para interpretar el coseno como una razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa en un triángulo rectángulo cualquiera, recordando y aplicando temas vistos como: **el Teorema de Thales, triángulos semejantes y la proporcionalidad que se deriva entre sus lados.**	
			**Recurso interactivo de Geogebra**(con seno y coseno, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo, cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente, tangente)
		El docente define el **seno** como una razón entre el cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo y la hipotenusa.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Los estudiantes realizan las siguientes preguntas orientadoras al observar los diferentes catetos opuestos de los diferentes triángulos rectángulos que se dibujaron y los que muestra el recurso **(momento 2 en el aplicativo Geogebra en cateto opuesto)**: 1. ¿Cuál es el resultado máximo del cateto opuesto en el primer cuadrante? 2. ¿Cuál es el resultado mínimo del cateto opuesto en el primer cuadrante? 3. ¿Cuál es el resultado máximo y mínimo del cateto opuesto en los demás cuadrantes? 4. ¿Con qué se relaciona el seno de un ángulo del triángulo rectángulo que se forma con un punto cualquiera de la circunferencia unitaria? 5. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el seno de un ángulo cualquiera del triángulo rectángulo en la circunferencia unitaria?	
		Al observar los valores que tomaron los diferentes catetos opuestos de los diferentes triángulos rectángulos que se dibujaron, tienen como magnitud mínima 0 y como magnitud máxima 1, en el primer cuadrante de la circunferencia, luego en el segundo cuadrante, y así en tercer y cuarto cuadrante de la circunferencia; así se concluye que el seno de un ángulo se relaciona con la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria. Al extender la situación por todo el eje de las y, los estudiantes deben reconocer el seno como un número real acotado entre -1 y 1. Con la ayuda del docente los estudiantes establecen argumentos geométricos para interpretar el seno como una razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo cualquiera, recordando y aplicando temas vistos como: el teorema de Thales, triángulos	**Recurso interactivo de Geogebra** (con seno y coseno, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo, cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente, tangente)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		semejantes y la proporcionalidad que se deriva entre sus lados.	
		El docente define la **razón trigonométrica tangente** como una razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto a un ángulo de un triángulo rectángulo. El docente a través del recurso interactivo del Geogebra realiza las siguientes preguntas orientadoras: 1. ¿Qué puedes decir al comparar el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, con el cociente de las razones seno y coseno de los mismos ángulos? 2. ¿Qué puedes decir sobre los resultados de hallar la tangente de los ángulos de 85°,86°, 87°, 88°, 89°?	**Recurso interactivo de Geogebra**(con seno y coseno, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo, cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente, tangente)
		Como anteriormente se relacionó el coseno de un ángulo con la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria y el seno de un ángulo con la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria, entonces, los estudiantes deben reconocer la tangente como el cociente entre el seno y el coseno de un determinado ángulo e identifican la tangente como el cociente entre la ordenada y la abscisa de la coordenada de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen.	
		Los estudiantes observando los resultados del cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente del cuadro que aparece en el recurso interactivo de Geogebra y luego de responder las preguntas orientadoras, deducen que la tangente no está acotada por ningún valor. Se realizan las siguientes preguntas orientadoras para que los estudiantes respondan en el material del estudiante y socialicen con sus demás compañeros:	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados

1. ¿Qué sucede con la razón seno y coseno cuando la abscisa u ordenada son cero en el primer cuadrante?

Observando el cuadro 3 y el recurso interactivo de Geogebra; si la abscisa es cero es cuando la hipotenusa es igual a la ordenada en la circunferencia unitaria y su valor es uno, y si la ordenada es cero es cuando la hipotenusa es igual a la abscisa en la circunferencia unitaria y su valor es uno. Luego como la tangente es la razón del cateto opuesto y el adyacente, o la razón de la ordenada y la abscisa, o el cociente del seno y el coseno de un determinado ángulo, los estudiantes concluyen que la tangente no está definida, ya que la división por cero no existe, en este caso para el ángulo de 90°.

2. ¿Qué sucede con la razón seno y coseno cuando la abscisa u ordenada son cero en todos los demás cuadrantes de la circunferencia unitaria?

Al extender a toda la circunferencia unitaria se puede generalizar que los valores de los ángulos para los cuales no está definida la tangente son 90°, 270° y todos los ángulos que coincidan con ellos.

Recurso interactivo de Geogebra

El estudiante consigna lo anterior en el material del estudiante, además deben llenar el siguiente cuadro, comprobando los resultados con el uso de calculadora :

Cuadro 4

Ángulo	h	c.a.	c.o.	Sen θ	Cos θ	Tan θ
0	1					
$\pi/12$	1					
$\pi/6$	1					
$\pi/4$	1					
$\pi/3$	1					
$5\pi/12$	1					
$\pi/2$	1					

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		El docente define la razón trigonométrica cotangente como una razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto respecto a un ángulo de un triángulo rectángulo. El docente a través del recurso interactivo del Geogebra realiza las siguientes preguntas orientadoras: 1. ¿Qué puedes decir al comparar el cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto, con el cociente de las razones coseno y seno de los mismos ángulos? 2. ¿Qué puedes decir sobre los resultados de hallar la tangente de los ángulos de 175°,176°, 177°, 178°, 179°? Como anteriormente se relacionó el coseno de un ángulo con la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria y el seno de un ángulo con la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria, entonces los estudiantes deben reconocer la cotangente como el cociente entre el coseno y el seno de un determinado ángulo e identifica la cotangente como el cociente entre la abscisa y ordenada de la coordenada de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen. Los estudiantes observando los resultados del cociente entre cateto adyacente y cateto opuesto del cuadro, deducen que la cotangente no está acotada por ningún valor.	**Recurso interactivo de Geogebra** (con seno, coseno, tangente, cotangente y secante, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo)
		Se realizan las siguientes preguntas para que los estudiantes respondan en el material del estudiante y socialicen con sus demás compañeros: 1. ¿Qué sucede con la razón seno y coseno cuando la abscisa u ordenada son cero en el primer cuadrante?	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Observando el cuadro; la abscisa es cero cuando la hipotenusa es igual a la ordenada en la circunferencia unitaria y su valor es uno, y la ordenada es cero cuando la hipotenusa es igual a la abscisa en la circunferencia unitaria y su valor es uno. Luego como la cotangente es la razón del cateto adyacente y el opuesto, o la razón de la abscisa y ordenada, o el cociente del coseno y el seno de un determinado ángulo, entonces los estudiantes concluyen que la concluyen que la cotangente no está definida, ya que la división por cero no existe, en este caso para el ángulo cero. 2. ¿Qué sucede con la razón coseno cuando la abscisa u ordenada son cero en todos los demás cuadrantes de la circunferencia unitaria? 3. Con base en lo observando en el recurso interactivo de Geogebra, ¿cuál es el seno de 0°,180° y 360°?, ¿qué pasa cuando dividimos por este valor?	
		Los estudiantes encuentran que el seno de 0°,180° y 360° es cero y concluyen que la división por cero no es posible. Al extender a toda la circunferencia unitaria se puede generalizar que los valores de los ángulos para los cuales no está definida la cotangente (cociente de las razones coseno sobre seno) son 0°, 180°, 360° y todos los ángulos que coincidan con ellos. El docente define la razón trigonométrica secante como una razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto adyacente a un ángulo. Como anteriormente se relacionó el coseno de un ángulo con la abscisa de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria, entonces los estudiantes deben identificar la secante como el cociente entre la hipotenusa y la abscisa, o sea el inverso multiplicativo de la abscisa de la coordenada de un punto de la	**Recurso interactivo de Geogebra** (con seno, coseno, tangente) **Material del estudiante**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		circunferencia unitaria con centro en el origen y a su vez los estudiantes deben reconocer la secante como el inverso multiplicativo de la razón coseno.	
		El docente realiza las siguientes preguntas orientadoras para que los estudiantes respondan en el material del estudiante y socialicen con sus demás compañeros: 1. ¿Qué sucede con la razón coseno cuando la abscisa es cero en el primer cuadrante? 2. ¿Qué sucede con la razón coseno cuando la abscisa es cero en todos los demás cuadrantes de la circunferencia unitaria? 3. Con base en lo observado en el recurso interactivo de Geogebra, ¿cuál es el coseno de 90°y 270°? ¿qué pasa cuando dividimos por este valor? 4. ¿Qué puedes decir sobre los resultados de hallar el coseno de los ángulos de 85°,86°, 87°, 88°, 89°?	
		Los estudiantes observando los resultados del cociente entre hipotenusa y cateto adyacente del cuadro del recurso interactivo del Geogebra y al responder las preguntas orientadoras, concluyen que la secante no está acotada por algún valor.	
		Observando el cuadro del recurso interactivo del Geogebra; si la abscisa es cero entonces la hipotenusa es igual a la ordenada en la circunferencia unitaria y su valor es uno. Luego como la secante es la razón de la hipotenusa y el cateto adyacente, o sea el inverso multiplicativo de la abscisa, entonces los estudiantes concluyen que la secante no está definida, ya que la división por cero no existe, en este caso para el ángulo de 90°. Al extender a toda la circunferencia unitaria se puede generalizar que los valores de los ángulos para los cuales no	**Recurso interactivo de Geogebra**(con seno, coseno, tangente, cotangente y secante, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		está definida la secante son 90°, 270° y todos los ángulos que coincidan con ellos.	
		El docente define la razón trigonométrica cosecante como una razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto opuesto a un ángulo. Como anteriormente se relacionó el seno de un ángulo con la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia unitaria, entonces los estudiantes deben identificar la cosecante como el cociente entre la hipotenusa y la ordenada, o sea, el inverso multiplicativo de la ordenada de la coordenada de un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen y a su vez los estudiantes deben reconocer la cosecante como el inverso multiplicativo de la razón seno.	
		El docente usando el recurso interactivo del Geogebra realiza las siguientes preguntas orientadoras para que los estudiantes respondan en el material del estudiante y socialicen con sus demás compañeros: 1. ¿Qué sucede con la razón seno cuando la ordenada es cero en el primer cuadrante? 2. ¿Qué sucede con la razón seno cuando la ordenada es cero en todos los demás cuadrantes de la circunferencia unitaria? 3. Observando el recurso interactivo de Geogebra, ¿cuál es el seno de 0°,180° y 360°? ¿Qué pasa cuando dividimos por este valor? 4. ¿Qué puedes decir sobre los resultados de hallar el seno de los ángulos de 175°,176°, 177°, 178°, 179°? Los estudiantes observando los resultados del cociente entre hipotenusa y cateto opuesto del cuadro del recurso interactivo del Geogebra y al responder las preguntas	**Recurso interactivo de Geogebra** (con seno, coseno, tangente, cotangente y secante, además con las variaciones de los ángulos, hipotenusa, catetos del triángulo) **Material del estudiante**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		orientadoras, concluyen que la cosecante no está acotada por algún valor. Los estudiantes observando los resultados del cociente entre hipotenusa y cateto opuesto del cuadro del recurso interactivo del Geogebra, concluyen que la cosecante no está acotada por algún valor y no toma valores entre -1 y 1.	
		Se realizan las siguientes preguntas para que los estudiantes respondan en el material del estudiante y socialicen con sus demás compañeros: 1. Con base en lo visto hasta el momento qué concluyes con respecto al uso de las proyecciones de una unidad elegida en una circunferencia unitaria. 2. Haz una lista de ángulos a los que no es posible hallarles todas las razones trigonométricas, apóyate en la información de la tabla antes desarrollada. 3. ¿Debido a qué razón hay valores de ángulos a los que no se puede determinar algunas razones trigonométricas?	
		Observando el cuadro del recurso interactivo; si la ordenada es cero entonces la hipotenusa es igual a la abscisa en la circunferencia unitaria y su valor es uno. Luego como la cosecante es la razón de la hipotenusa y el cateto opuesto, o sea, el inverso multiplicativo de la ordenada, entonces los estudiantes concluyen que la división por cero no existe por tanto se establece que la cosecante no está definida para ciertos ángulos, en este caso para el ángulo 0° en el primer cuadrante. Al extender a toda la circunferencia unitaria se puede generalizar que los valores de los ángulos para los cuales no está definida la cosecante son 0°, 180°,360° y todos los ángulos que coincidan con ellos.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Actividad 4: Deducción de las razones trigonométricas exactas para ángulos notables en un triángulo rectángulo (H/C 39, H/C 40, H/C 41, H/C 42, H/C 43, H/C 44, H/C 45, H/C 46) El docente usa un **recurso interactivo** para encontrar las razones trigonométricas para ángulos construibles de Geogebra, donde se genera un triángulo en el círculo unitario y a medida que se vaya haciendo el recorrido de un punto sobre la circunferencia, los datos del triángulo rectángulo van variando y en un cuadro va mostrando las variaciones del ángulo, la hipotenusa, cateto opuesto, cateto adyacente, y todas las razones trigonométricas Los estudiantes dibujan en **el material del estudiante** un triángulo rectángulo con los ángulos 30°, 60° y 90°, con la hipotenusa igual a 2, el cateto opuesto a 30° igual a 1 y el cateto adyacente al ángulo de 30° igual a 3 . El docente solicita a los estudiantes que realicen la comprobación del teorema de Pitágoras con estos valores de los lados del triángulo dibujado. El docente solicita a los estudiantes que repitan el ejercicio pero ahora con un triángulo Isósceles con un ángulo de 90° y los otros dos de 45°, con la hipotenusa igual a 2 y los otros dos catetos igual a 2, el docente explica que los ángulos 30°, 60°, 90°, 45° reciben el nombre de ángulos notables. **Se debe consignar en el material del estudiante.**	
Resumen	**Resumen**	**Afinación de conceptos y extrapolación a otros contextos.** Los estudiantes responden en su material del estudiante en grupos de cuatro personas las siguientes consignas y preguntas. 1. Escriban para cada una de las razones trigonométricas, qué representan en términos de los lados de un triángulo rectángulo.	**Material del estudiante** Se observa la tabla de valores para los ángulos notables desde 0ª hasta 180ª para las seis razones trigonométricas.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		2. ¿Qué condiciones y restricciones presentan las razones trigonométricas estudiadas en la clase? 3. Describan cuales son los ángulos notables y expliquen por qué son notables. 4. Comparen los valores que se presentan en la tabla para los ángulos notables con los obtenidos por ustedes con calculadora. Los estudiantes usando calculadora comprueban lo que en el material del estudiante aparece **(cuadro de las razones trigonométricas).**	
Tarea	**Tarea**	1. Consultar en algunos textos de trigonometría o en la red la forma como se aplican las razones trigonométricas en la solución de problemas en contexto. 2. Del video motivacional de la historia de la trigonometría, responder las siguientes preguntas: • ¿Qué culturas usaron los triángulos y para qué? • Además de servirnos para conocer propiedades de las estrellas, ¿en dónde más podemos ver la aplicación del estudio de los triángulos (trigonometría)? • ¿De qué manera median los egipcios y babilonios los ángulos? • ¿Quién es llamado el padre de la trigonometría? Haga una breve biografía referenciando otros personajes construyendo una línea de tiempo. • Emita una opinión sobre la actividad planteada al final del video.	**Material del estudiante** **Video motivacional**