Grado 10

Matematicas - Unidad 3

¡Un mundo de relaciones a partir del triángulo!

Tema

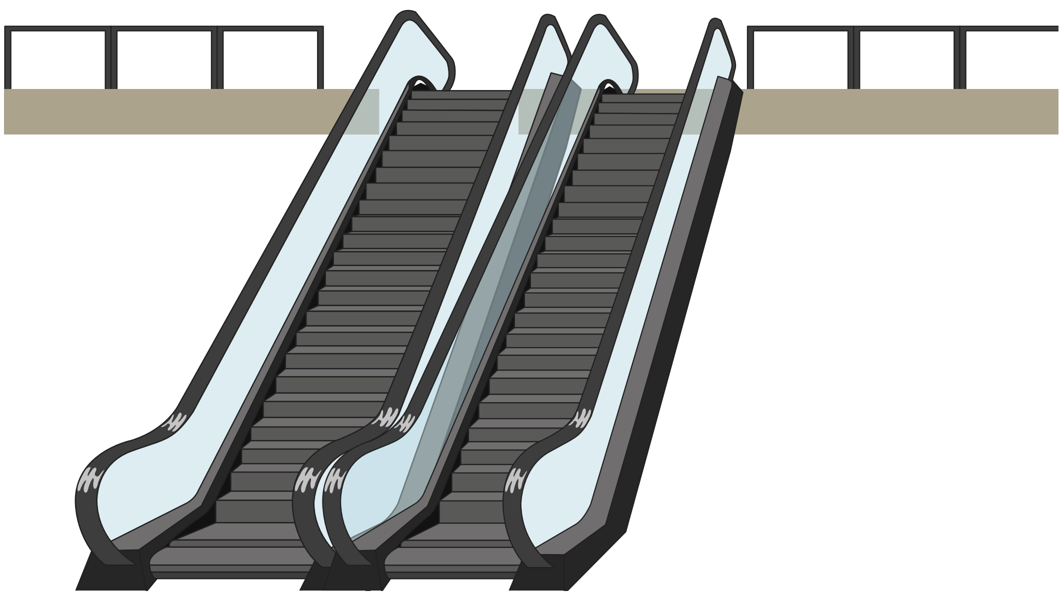
Uso de identidades trigonométricas para re escribir o simplicar una expresión

Nombre: ______________________ **Curso:** __________

Introducción

A continuación se presentan las identidades trigonométricas, resultado de estudiar todas las relaciones derivadas del círculo unitario. Se tratan aspectos algebraicos de la trigonometría, como simplificación, factorización y resolución de ecuaciones.

Actividad Introductoria: La escalera eléctrica



Se presenta una animación en la que dos jóvenes desean saber la medida de la escalera eléctrica de un centro comercial.

Uno de los dos comenta que la medida se puede determinar usando la trigonometría, hace referencia que esta disciplina se encarga de investigar las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo rectángulo.

Le muestra las relaciones de coseno y empiezan entre los dos a hacer el proceso de mediciones para encontrar la medida del largo de la escalera. En primer lugar hacen una simulación de dibujo sobre los bordes de la escalera y su base. Luego toman la medida de uno de los catetos, miden el ángulo de elevación de la escalera.

Por último hacen las medidas necesarias para encontrar la medida del largo de la escalera eléctrica.

Luego de ver la animación, se le pregunta a los estudiantes que otras relaciones conoce de las funciones trigonométricas.

Objetivos de aprendizaje

» Simplificar expresiones trigonométricas haciendo uso de las identidades

» Desarrollar procesos algebraicos que involucren el uso de las razones trigonométricas.

» Realizar transformaciones de expresiones algebraicas para encontrar o validar otras equivalentes.

Después de observar el video, en conjunto con tu profesor y compañeros de clase, y analizar los componentes básicos de las expresiones algebraicas (como repaso), completa la siguiente tabla:

1. Define, ¿qué son términos semejantes?

2. Da tres triadas de ejemplos de términos semejantes.

3. Reduzca las siguientes expresiones:

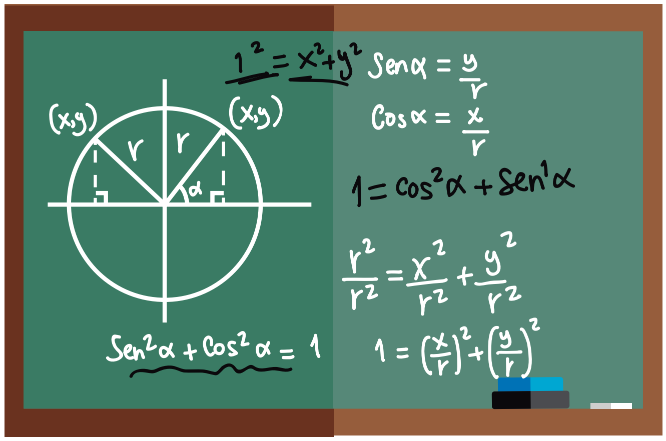
- $a+2a+5b+a-2b$ ______________________________
- $-2x-3y+4x+3y+2$ ______________________________
- $5m-2n-2m+n-3m+n+1$ _________________________
- $3a-2a+15b-a-5b$ ______________________________
- $5x+3y-4x-12y+5$ ______________________________
- $8m+2mn-2n-2mn+5n-8m+4n+7$ _________________
- $3a^2-2a+12a^2-3a-15a^2$ _______________________
- $7x+4y+5x-15y+2$ _____________________________________

Apoyado en la explicación del recurso interactivo, sobre sustituciones y reemplazos en expresiones algebraicas resuelve los siguientes ejercicios:

- $a+2a+5b$, Si $a=1$ y $b=-2$
- $2x^2-3y+4x$, Si $x=2$ y $y=-3$
- $2x^2-3y^2+4x-2$, Si $x=1$ y $y=-2$
- $2a+2ab-3b$, Si $a=2$ y $b=-1$
- $x^2 y-4y+5x-2$, Si $x=-1$ y $y=-2$
- $5x^2 z-3xy^2+4xz-5$, Si $x=1$, $y=-1$ y $z=2$
- $5a+3ab-5b^3$, Si $a=2$ y $b=-2$
- $2x^2-3y^3+4x^4$, Si $x=1$ y $y=-2$

- Identidades trigonométricas básicas.

RELACIONES RECÍPROCAS	RELACIONES COCIENTES	RELACIONES PITAGÓRICAS
$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$		$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$



Divida la identidad fundamental entre seno y coseno, determina el resultado.

Completa cada una de las siguientes expresiones con base en la tabla anterior

$$\tan \propto = \frac{\square}{\cos\propto}$$

$$\text{sen} \propto = \frac{1}{\square}$$

$$\cos^2 \propto + \square = 1$$

$$\cos \propto = \frac{1}{\square}$$

$$\cos \propto = \frac{\square}{\tan\propto}$$

Identidades trigonométricas

- Coseno y tangente en función del seno

Coseno	Tangente
$sen^2\,x + \cos^2 x = 1$	$\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$
$\cos^2 x = 1 - sen^2\,x$	$\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\sqrt{1 - sen^2\,x}}$
$\cos x = \sqrt{1 - sen^2\,x}$	

Reescribir cada una de las expresiones en función del seno:

$\csc \alpha$

$\sec \alpha$

$\cot \alpha$

Apóyate en la explicación del recurso interactivo y resuelve cada uno de los ejercicios propuestos Compara con tus compañeros y profesor cada ejercicio.

- Seno y tangente en función del coseno

Seno	Tangente
$sen^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
$sen^2 x = 1 - \cos^2 x$	$\tan x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$
$sen\, x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$	

Reescribir cada una de las expresiones en función del seno:

$\csc \alpha$

$\sec \alpha$

$\cot \alpha$

Apóyate en la explicación del recurso interactivo y resuelve cada uno de los ejercicios propuestos Compara con tus compañeros y profesor cada ejercicio.

Identidades trigonométricas:

“Las identidades trigonométricas son relaciones de equivalencia que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades son siempre útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidas funciones trigonométricas, cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas estas razones. Las identidades trigonométricas nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes, y otros procedimientos algebraicos y algorítmicos.”

CRITERIOS PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. EMPEZAR CON UN MIEMBRO. Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.

2. APLICAR IDENTIDADES CONOCIDAS. Use el algebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.

3. CONVERTIR EN SENOS Y COSENOS. Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Simplificación de Identidades trigonométricas

Ejemplo.

Simplificar la siguiente expresión:

$$\text{sen}\propto \cdot(\cot \propto+\csc \propto)$$

Reemplazando los valores de $\cot \propto$ y $\csc \propto$, se tiene:

$$sen \propto \bullet \left(\frac{\cos \propto}{sen \propto} + \frac{1}{sen \propto} \right)$$

Operando el paréntesis:

$$sen \propto \bullet \left(\frac{\cos \propto + 1}{sen \propto} \right)$$

Simplificando numerador y denominador sen , se obtiene el resultado:

$$\cos\propto + 1$$

Simplifique las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{1-sen^2\propto}{sen^2\propto}$

b. $3\,(\tan^2\propto - \sec^2\propto)$

c. $\dfrac{sen\propto \cdot \csc\propto}{\cot\propto}$

d. $\dfrac{tan^2\propto\ sen^2\propto}{tan^2\propto\ sen^2\propto}$

Simplificación de Identidades trigonométricas

(Apóyese también en el video del recurso interactivo, para explicaciones adicionales)

Ejemplo.

Demostrar la siguiente expresión.

$$\tan\propto+\cot\propto=\frac{\csc\propto}{\cos\propto}$$

Fijados en el costado izquierdo de la relación de equivalencia, se aplica la definición de la razón:

$$\frac{sen\propto}{\cos\propto}+\frac{\cos\propto}{sen\propto}=\frac{\csc\propto}{\cos\propto}$$

Operando las fracciones de la izquierda:

$$\frac{sen^2\propto+\cos^2\propto}{sen\propto\cdot\cos\propto}=\frac{\csc\propto}{\cos\propto}$$

Usando la relación pitagórica:

$$\frac{1}{sen\propto\cdot\cos\propto}=\frac{\csc\propto}{\cos\propto}$$

Por definición se tiene la igualdad:

$$\frac{\csc \propto}{\cos \propto} = \frac{\csc \propto}{\cos \propto}$$

Demuestre las siguientes expresiones:

a. $$\frac{1 - 2\,\text{sen}^2 \propto}{\cos \propto - \text{sen} \propto} = \text{sen} \propto - \cos \propto$$

b. $$\frac{\sec \propto}{\cot \propto \bullet \tan \propto} = \text{sen} \propto$$

c. $$\frac{\cos \propto}{1 + \text{sen} \propto} = \frac{1 - \text{sen} \propto}{\cos \propto}$$

Actividad 2: Identidades trigonométricas “de ángulos dobles y medios ángulos- sumas y resta"

Tablas de valores de ángulos de las razones trigonométricas del círculo unitario.

α (grados)	0°	30°	40°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
α (radianes)	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	-1	0	1	$-\infty$	1
α (grados)	0	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
α (radianes)	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
csc α	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$
sec α	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$
cot α	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$\pm\infty$	1	0	-1

Fórmulas de suma y resta de ángulos.

Fórmulas de adición y sustracción	
Fórmulas para el seno:	$\text{sen}(s+t) = \text{sen}\, s \cos t + \cos s\, \text{sen}\, t$ $\text{sen}(s-t) = \text{sen}\, s \cos t - \cos s\, \text{sen}\, t$
Fórmulas para el coseno:	$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$ $\cos(s-t) = \cos s \cos t + \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$
Fórmulas para la tangente:	$\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s + \tan t}$ $\tan(s-t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s + \tan t}$

Ejemplo.

Hallar le valor para el $sen15°$

Acomodando para usar fórmula de resta de seno se tiene:

$$sen(45°-30°)$$

Sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$sen45°\cdot cos30°-cos45°\cdot sen30°$$

Reemplazando valores según tabla:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Operando se tiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

Demuestre las siguientes expresiones:

- cos15°
- tan15°
- cos75°
- cos20°
- Sen60°

Fórmulas de ángulos dobles.

Fórmulas para el ángulo doble	
Fórmulas para el seno:	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
Fórmulas para el coseno:	$\cos 2x = 2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ $= 2 \cos^2 x - 1$
Fórmulas para la tangente:	$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Ejemplo.

Hallar le valor para el $sen120°$

Acomodando para usar fórmula de resta de seno se tiene:

$$sen2(60°)$$

Sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$2sen60°\cdot cos60°$$

Reemplazando valores según tabla:

$$2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$

Operando se tiene:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Uso de identidades:

Demuestre la identidad $\dfrac{sen\ 3x}{sen x\ \cos x} = 4 \cos x - sec x$

Solución: Empezamos con el primer miembro.

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen}x \ \cos x} = \frac{\operatorname{sen}(x+2x)}{\operatorname{sen}x \cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}x \cos x}$$ Fórmula de adición

$$= \frac{\operatorname{sen}x\,(2\cos^2 x - 1) + \cos x\,(2 \operatorname{sen}x \cos x)}{\operatorname{sen}x \cos x}$$ Fórmulas para el ángulo doble

$$= \frac{\operatorname{sen}x\,(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen}x \cos x} + \frac{\cos x\,(2 \operatorname{sen}x \cos x)}{\operatorname{sen}x \cos x}$$ Separación de fracciones

$$= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x$$ Cancelación

$$= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$$ Separación de fracciones

$$= 4\cos x - \sec x$$ Identidad recíproca

Apoyado en el recurso interactivo y las explicaciones resuelve:

- $\cos 12°$
- $\tan 120°$

Fórmulas de ángulos medios o semiángulos.

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La elección del signo **+** o **-** depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$

Como 15° pertenece al primer cuadrante su signo será positivo

$$\mathrm{tg}\,(15^{\circ}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(30^{\circ})}{1 + \cos(30^{\circ})}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Ejemplo.

Hallar le valor para el $sen 22.5°$

Acomodando para usar fórmula de resta de seno se tiene:

$$sen\ \frac{45°}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula se tiene: $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 45°}{2}}$

Reemplazando valores según tabla: $\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{2}/2}{2}}$

Operando se tiene: $\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{2}/2}{4}}$

Simplificando se tiene: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Apoyado en las explicaciones halla:

- $\cos 22.5°$
- $\tan 22.5°$
- sen 75°
- tan 15°

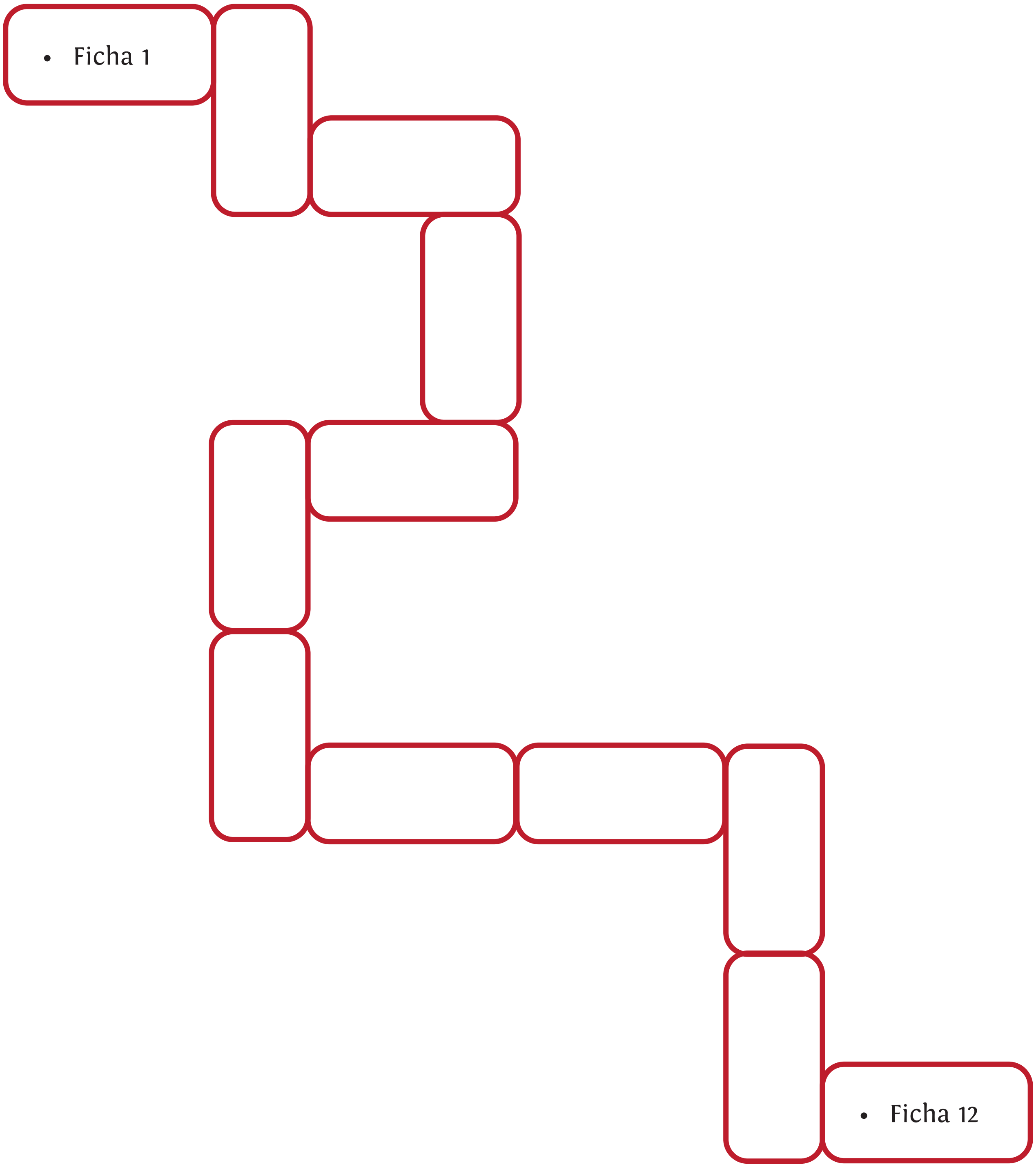
Resumen

Completa el siguiente tablero usando todas las fichas del domino.

“Usa las 12 fichas estableciendo relación de equivalencia entre razones e identidades trigonométricas básicas”

Ten en cuenta la ficha inicial y final, para terminar el tablero; recuerda que debes usar todas las fichas y no se deben repetir.

Tablero.



- Recorta las fichas y completa el tablero

  - Ficha 1

$\cos\propto$ | $\operatorname{sen}\propto$

$\dfrac{1}{\cot\propto}$ | $\cot\propto$

$\tan\propto$ | $\dfrac{1}{\sec\propto}$

$\csc$ | $\cot\propto$

$\dfrac{\cos\propto}{\operatorname{sen}\propto}$ | $\sec^2\propto + \tan^2\propto$

$\dfrac{1}{\cot\propto}$ | $\operatorname{sen}^2\propto + \cos^2\propto$

$\dfrac{1}{\csc\propto}$ | $\tan\propto$

$\dfrac{\operatorname{sen}\propto}{\cos\propto}$ | $\dfrac{\cos\propto}{\operatorname{sen}\propto}$

$\operatorname{sen}\propto$ | $\dfrac{\cos\propto}{\operatorname{sen}\propto}$

$\dfrac{1}{\sec\propto}$ | 1

$\cot\propto$ | 1

- Ficha 12

$\tan\propto$ | $\dfrac{1}{\csc\propto}$

Tarea

Realizar una indagación sobre situaciones de aplicación (de la vida real) de razones y/o identidades trigonométricas en la vida diaria, estudiarlo con el docente y luego socializarlo con sus compañeros.