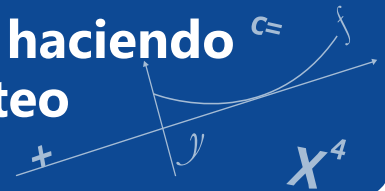


# Cálculo de probabilidades haciendo uso de las técnicas de conteo



Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)

**Grado 8:**

**UoL\_5:** Entendiendo el azar a través de representaciones.  
**LO\_6:** Resolución de situaciones aleatorias mediante estimaciones y la regla de Laplace.

**Grado 10:**

**UoL\_5:** Elementos adicionales de un análisis estadístico.  
**LO\_4:** Reconocimiento de variables aleatorias.

Materiales para el desarrollo de la clase:

- Baraja de Póker.

Objetivos de aprendizaje

- Calcular probabilidades en situaciones aleatorias de conteo y agrupación.
- Identificar situaciones de conteo y agrupación existentes en medios de comunicación y otras fuentes.

Habilidad / Conocimiento (H/C)

**SCO: Reconoce situaciones aleatorias de conteo provenientes de diversas fuentes.**


1. Hace uso de permutaciones y combinaciones en situaciones de conteo y agrupación.
2. Identifica situaciones de conteo y agrupación en medios de comunicación y situaciones del diario vivir.
3. Calcula probabilidades en situaciones de muestreo aleatorio con reposición.
4. Encuentra probabilidades en situaciones de muestreo aleatorio sin reposición.
5. Reconoce las reglas de juegos de azar como loterías, póker, rifas y demás.
6. Calcula probabilidades de ganancia de loterías teniendo en cuenta sus diferentes reglas.
7. Construye situaciones isomorfas de muestreo aleatorio que pueden sustituir los experimentos usuales



Flujo de aprendizaje

1. **Introducción:** ¡Me lo voy a ganar! (H/C 1)
2. **Objetivos de aprendizaje**
3. **Contenido:**
  - 3.1. **Actividad 1:** Aprendamos (H/C 1, H/C 2)
  - 3.2. **Actividad 2:** Reconociendo (H/C 3, H/C 4, H/C 5, H/C 6, H/C 7)
4. **Resumen:** Juguemos
5. **Tarea**

Lineamientos evaluativos

Los estudiantes, a través de las diferentes actividades propuestas, están en capacidad de reconocer situaciones de conteo y agrupación en diferentes contextos, hacer uso de permutaciones y combinaciones en dichas situaciones, calcular probabilidades en situaciones de muestreo aleatorio con y sin reposición y finalmente construir situaciones isomorfas de muestreo aleatorio que pueden sustituir los experimentos usuales.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p><b>Introducción</b></p> 	<p><b>Introducción</b></p>	<p><b>Actividad: ¡Me lo voy a ganar!</b></p> <p>El docente presenta el video a los estudiantes, en el que se muestra, como un optimista apostador que ha comprado un billete de lotería, es desanimado por otra persona al saber cuál es la probabilidad de ganársela.</p> <p>Posteriormente, el docente hace lectura de las siguientes preguntas, las cuales serán resueltas en el Material del Estudiante, en parejas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Tú, o alguien cercano a tu familia, compra la lotería?</li> <li>• ¿Es posible ganarse la lotería? Justifica tu respuesta.</li> <li>• ¿Qué es un juego de azar?</li> <li>• ¿Existe alguna relación entre los juegos de azar y la estadística?</li> <li>• ¿Es posible conocer, con exactitud, todos los posibles resultados de un juego de azar?</li> </ul> <p>Dado un tiempo prudencial, para que los estudiantes aborden las preguntas propuestas, el docente debe direccionar la socialización de las respuestas dadas por mínimo cinco parejas de estudiantes. Es importante, que de ser posible, el docente seleccione estudiantes que hayan dado</p>	<p><b>Video</b></p> <p><b>Sinopsis:</b> El video presenta una persona con un alto nivel de optimismo frente a la posibilidad de ganarse la lotería, después de haber comprado un solo boleto. Después, esta persona establece un dialogo con otra, con quien elabora una serie de planes para realizar al ganarse el premio de la lotería. Al escuchar, una tercera persona la conversación, les indica cual es la probabilidad de ganarse la lotería, dejando desanimado al comprador del boleto, además les expresa que por reglamentación de los juegos de azar, le quitaran una tercera parte de lo que se gane por concepto de impuestos, lo que lo deja más desanimado.</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		respuestas diferentes a las preguntas y que se dejen abiertas posibles dudas y comentarios, para ser abordados en el desarrollo de las actividades.	
<b>Objetivos</b> 		<p>El docente, en compañía de los estudiantes, escribe el objetivo al que creen que se debe llegar. Después, se recomienda presentar el objetivo propuesto para este objeto de aprendizaje. Se considera importante, que se realice la explicación del objetivo propuesto, pues a partir de éste el estudiante reconocerá lo que debe alcanzar finalizado el proceso enseñanza-aprendizaje.</p>	
<b>Contenido</b> 	<p>El docente presenta el tema</p>	<p><b>Actividad 1: Aprendamos (H/C 1, H/C 2)</b></p> <p>El docente inicia la actividad, contextualizando a los estudiantes en relación a lo que se trabajará durante el desarrollo de esta.</p> <hr/> <p>Se inicia con el reconocimiento de situaciones en las que se hace alusión a la probabilidad, sin necesidad de conocer a fondo este concepto y sus aplicaciones. Es necesario entonces, evocar frases con las que los estudiantes se puedan ver identificados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¡Probablemente gane la Materia!</li> <li>• ¡La probabilidad que tiene mi equipo de ganar la copa es muy alta!</li> <li>• ¡Es muy probable que vamos de paseo este fin de semana!</li> </ul> <hr/> <p>Posteriormente, el docente solicita a los estudiantes abordar las siguientes consignas en parejas en el <b>Material del Estudiante</b>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Enlista diez (10) situaciones en las que se pueda hacer alusión a la probabilidad.</li> </ul>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica diez (10) situaciones del diario vivir en las que se haga necesario realizar conteo y agrupación.</li> </ul> <p>En relación a la segunda consigna propuesta, el docente puede considerar necesario hacer la siguiente aclaración:</p> <p><b>Dentro de la estadística, es importante conocer algunas técnicas que permiten determinar el número de elementos del espacio muestral de acuerdo con las características del experimento. Estas técnicas son llamadas técnicas de conteo o técnicas de enumeración.</b></p> <p>Para definir las técnicas de conteo es necesario reconocer conceptos que ya se han visto como los de población y muestra, y entender dos conceptos relacionados con el orden y la repetición.</p> <hr/> <p>A continuación, el docente plantea el siguiente cuestionamiento, para ser abordado en parejas en el Material del Estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿Es posible identificar situaciones de conteo y agrupación en medios de comunicación?: Sí ¿Cuáles?, No ¿Por qué?</li> </ul> <hr/> <p>El docente socializa las respuestas dadas por algunos de sus estudiantes y prosigue con la actividad planteando la siguiente consigna:</p> <p><b>Indica cuales son tus conocimientos previos sobre los conceptos de permutación y combinación.</b></p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Dadas las repuestas de mínimo cinco estudiantes, el docente procederá a formalizar los siguientes aspectos, apoyado en el recurso.</p> <p>Es necesario que el docente indique a los estudiantes que deben tomar apuntes en relación a lo que se presentará:</p> <p><b>Una permutación es un arreglo de todos o parte de los elementos de un conjunto.</b></p> <p>De acuerdo a esta definición, si se quiere tomar una muestra de <math>n</math> elementos <math>y</math>, para la conformación del primer elemento se tienen <math>N</math> posibilidades en la población, para la elección del segundo elemento de la muestra se tienen <math>N - 1</math> posibilidades, pues no existe repetición; para la elección del tercer elemento se tienen <math>N - 2</math> posibilidades y así sucesivamente.</p> <hr/> <p><b>Las combinatorias son un arreglo, en el que interesa el número de posibles selecciones <math>n</math> en la muestra de <math>N</math> objetos en la población, sin importar el orden.</b></p> <p>Apoyado en el recurso, el docente presentará las expresiones matemáticas que permiten hacer el caculo de dichas selecciones, en estas es importante hacer énfasis en la comprensión de <math>N!</math> y <math>n!</math>, reconociendo que estos corresponden al siguiente producto:</p> $N! = N (N - 1)(N - 2) \cdots (2)(1)$ <hr/> <p>Finalizada la explicación, el docente apoyado en el recurso, propone la realización de las siguientes consignas:</p> <p>Conservando las parejas de trabajo, resuelve los cuatro ejercicios propuesto en el <b>Material de Estudiante</b>, indicando si hacen alusión a una permutación o una combinatoria.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p><b>Ejercicios:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cuántos números de exactamente 5 cifras contienen al menos una vez la cifra 3? y ¿Cuántos de ellos contienen exactamente una vez la cifra 3?</li> <li>2. Calcula la suma de todos los números de 9 cifras en los que aparece exactamente una vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3,..., 9.</li> <li>3. Una compañía tiene 5 directores, y una caja fuerte guarda los secretos de la compañía. Se quiere poner el mínimo número de cerraduras que garantice que, dando el mismo número de llaves a cada director, cualquier mayoría (3 o más) de ellos pueda abrir la caja, y ninguna minoría (2 o menos) pueda abrirla. ¿Cuántas cerraduras hay que poner y cuántas llaves recibirán cada directivo?</li> <li>4. En España, los coches tienen una matrícula que consta de cuatro dígitos decimales, seguidos de tres letras sacadas de un alfabeto de 26. ¿Cuántas matrículas distintas pueden llegar a existir?</li> </ol> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Socializa las respuestas que des a los ejercicios propuestos a otra pareja de trabajo y define acuerdo con ellos, en relación a la veracidad de estas.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Para finalizar esta actividad, el docente apoyado en el recurso, explicará a los estudiantes dos ejemplos, siendo importante que tenga en cuenta la participación de los estudiantes y realice las aclaraciones y correcciones que considere pertinentes.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p><b>Actividad 2: Reconociendo (H/C 3, H/C 4, H/C 5, H/C 6, H/C 7)</b></p> <p>Para dar inicio a esta actividad, el docente propone la realización de las siguientes consignas y preguntas, en el <b>Material del Estudiante</b>, en grupos de cuatro integrantes. La intencionalidad de estas, se centra en la posibilidad de hacer explícitos los conocimientos previos que puedan tener los estudiantes en relación a los temas que se van a abordar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué es la probabilidad?</li> <li>• ¿Conoces algunos tipos o clases de probabilidades?</li> <li>• ¿Cómo se calcula una probabilidad?</li> <li>• Enlista diez (10) situaciones en las que se pueda hacer necesario el uso del cálculo de probabilidades.</li> <li>• Redacta un texto en el que expreses la utilidad que puede tener en tu vida saber calcular probabilidades.</li> </ul> <hr/> <p>El docente debe invitar un representante de cada grupo, a socializar las respuestas dadas por estos a cada pregunta y consigna propuesta. Haciendo uso de un cuadro de texto, se tomarán apuntes de la información más relevante que se tenga. Posteriormente el docente, apoyado en el recurso, presentará y explicará la siguiente información:</p> <p>Dado un experimento aleatorio con su respectivo espacio muestral, al considerar un evento <b>E</b>, se tiene la probabilidad de ocurrencia de <b>E</b>, notada <b>P (E)</b> es el cociente entre el número de elementos del evento y el número de elementos del espacio muestral. Así:</p> $P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Dos casos importante, que deben ser considerados, son los siguientes:</p> $P(S) = \frac{\#(S)}{\#(S)} = 1$ $P(\phi) = \frac{\#(\phi)}{\#(S)} = 0$ <p>La probabilidad del evento seguro es 1 y la probabilidad del evento imposible es 0. Ya que el máximo número de elementos de cualquier subconjunto del espacio muestral es el número de elementos del espacio y el número mínimo es cero, que corresponde a conjunto vacío, entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento está en el intervalo [0,1].</p> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Posteriormente y teniendo en cuenta la información que se acaba de presentar y explicar, el docente propone la realización de las siguientes consignas y preguntas, en el Material del Estudiante, en grupos de cuatro integrantes:</p> <p><b>Lee detenidamente el caso que se presenta a continuación:</b></p> <p><b>Calcula la probabilidad de extraer una unidad defectuosa y otra buena de un lote de 20 unidades que se sabe es 5 % defectuoso.</b></p> <p><b>La extracción de las unidades puede realizarse de dos formas:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Retirando una unidad del lote y reponiéndola antes de extraer la segunda unidad.</li> <li>2. Retirando una unidad del lote y extraer la segunda unidad sin haber reintegrado la primera al lote.</li> </ol> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escribe, las cosas que pueden resultarte particulares en el caso.</li> </ul>	





Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cómo realizarías el cálculo de la probabilidad?</li> <li>• ¿Genera alguna variante, el calcular la probabilidad, cuando se reintegra la unidad extraída?</li> <li>• ¿Al reponer o no, la primera unidad que se retira, se obtiene el mismo resultado?</li> </ul> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Dado un tiempo prudencial, para que los estudiantes aborden las consignas y preguntas propuestas, el docente debe direccionar la socialización de estas, contando con la participación de un representante de cada grupo. Durante dicha socialización, el docente debe enfatizar en la particularidad que se tiene al hacer la reposición del elemento que se ha retirado y aclarar, a los estudiantes, que este caso hace alusión al cálculo de probabilidades con y sin reposición.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Además, se requiere que el docente tenga claro lo que sucede al hacer la reposición o no:</p> <p><b>1. Con reposición:</b></p> <p>La condición solicitada admite dos soluciones: <b>Primera unidad defectuosa y segunda unidad buena ó primera unidad buena y segunda unidad defectuosa.</b></p> <p>Probabilidad de obtener una unidad defectuosa:</p> $P(D) = 0,050 = 1/20$ <p>Probabilidad de obtener una unidad buena:</p> $P(B) = 0,950 = 19/20$ <p>Lo anterior se cumple independientemente del orden en que se extraigan las unidades debido a que la primera unidad extraída se repone al lote antes de extraer la segunda. Entonces la probabilidad solicitada es:</p> $P = P(D \text{ y } B) + P(B \text{ y } D) = 0,050 \times 0,950 + 0,950 \times 0,050 = 0,0950$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>2. Sin reposición:</p> <p>En este caso siguen siendo válidas las dos soluciones del caso anterior, pero ahora las probabilidades dependen del orden de extracción:</p> $PD \text{ y } B = 1/20 \times 19/19 = 0,050$ $PB \text{ y } D = 19/20 \times 1/19 = 0,050$ $P = PD \text{ y } B + PB \text{ y } D = 0,050 + 0,050 = 0,1000$ <hr/> <p>Seguidamente, el docente indaga en relación a los siguientes aspectos, los cuales deben ser abordados por los estudiantes en el <b>Material del Estudiante</b>, conservando los grupos de trabajo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué es una rifa?</li> <li>• ¿Has participado en una rifa? Si ¿Qué condiciones tenía está?, No ¿Por qué?</li> <li>• ¿Bajo qué condiciones las rifas son rentables para la persona o entidad que la organiza?</li> <li>• ¿Bajo qué condiciones las rifas son rentables para la persona o entidad que las adquiere?</li> </ul> <hr/> <p>Realizada la socialización de las respuestas, el docente debe proseguir, dando a los estudiantes las siguientes consignas de trabajo, para ser abordadas en el Material del Estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Indaga en relación a las reglas y plan de premios, que regulen dos loterías que se jueguen en nuestro país.</li> <li>• Indica la relación que se pueda establecer entre estas y la probabilidad, enlistando las probabilidades que se podrían calcular.</li> </ul>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Consecutivamente, apoyado en el recurso, el docente propone las siguientes preguntas de trabajo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿La probabilidad de ganarse la lotería, es igual, independientemente de la lotería que se compre y el número de boletos que se adquieran? Justifica tu respuesta.</li> <li>• ¿Cuál es la probabilidad que se tiene de ganarse un premio seco en cada una de las loterías consultadas?</li> <li>• ¿Si se adquieren 10 boletos de una de las loterías, cuál es la probabilidad de ganarse el premio mayor? ¿Cuál es la probabilidad de ganarse un premio seco?</li> </ul>	
		<p>Socializadas las respuestas dadas por cada grupo y después de establecer consenso en cuanto a estas, el docente da las siguientes consignas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Plantea una pregunta en la que relaciones una lotería y la probabilidad.</li> <li>• Intercambia tu pregunta, la cual debe tener un buen nivel de dificultad, con uno de los grupos de trabajo.</li> <li>• Evalúa la pertinencia de la pregunta que se te asigno.</li> <li>• Responde la pregunta que se te asigno.</li> </ul>	
		<p>Dado un tiempo prudencial, para abordar las consignas propuestas, el docente direcciona la socialización de las preguntas y de las respuestas dadas, siendo importante que se tenga en cuenta las condiciones particulares de la lotería que se seleccionó para la formulación de la pregunta y su posterior solución.</p>	
		<p>Para finalizar esta actividad, es necesario en primer lugar, que el docente clarifique el término <b>Isomorfias</b>. Para esto, se contará en el recurso, con la definición del término y algunos ejemplos del uso de este en diversos contextos.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Posteriormente, el docente debe plantear las siguientes consignas para ser abordadas en el <b>Material del Estudiante</b>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece dos situaciones de muestreo aleatorio, que correspondan a experimentos usuales.</li> <li>• A partir de las situaciones planteadas, construye situaciones isomorfas con las cuales se puedan sustituir las los experimentos usuales.</li> <li>• Intercambia tus situaciones (cuatro en total), con otro grupo de compañeros.</li> </ul>	
		<p>Dado el intercambio, es necesario que el docente direcciona la realización de las siguientes consignas en el <b>Material del Estudiante</b>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lee detenidamente la propuesta de tus compañeros.</li> <li>• Evalúa si efectivamente, la propuesta de tus compañeros corresponde a situaciones de muestreo aleatorio, justificando tu respuesta.</li> <li>• Evalúa si efectivamente, las segundas situaciones propuestas corresponden a situaciones isomorfas, justificando tu respuesta.</li> <li>• Si la propuesta de tus compañeros, corresponde a situaciones de muestreo aleatorio y a situaciones isomorfas, resuelve cada una de estas.</li> <li>• Si la propuesta de tus compañeros No corresponde a situaciones de muestreo aleatorio y a situaciones isomorfas, realiza los ajustes que consideres necesarios y posteriormente resuelve cada una de estas.</li> </ul>	
		<p>Es necesario que el docente, direcciona la socialización de las respuestas dadas, contando con la participación de un integrante de cada uno de los grupos, además se debe tener en cuenta que el grupo generador de las situaciones, debe tener la posibilidad de defender su propuesta, dado el caso en el que el grupo</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>evaluador indique que esta ha sido mal planteada.</p>	
<p><b>Resumen</b></p> 	<p><b>Resumen</b></p>	<p><b>Actividad: Juguemos.</b></p> <p><b>El docente, apoyado en el recurso, presenta a sus estudiantes la siguiente actividad, haciendo uso de la baraja de cartas:</b></p> <p>La probabilidad de sacar al azar dos o más objetos de un grupo (por ejemplo: cartas de una baraja), se puede calcular en dos condiciones diferentes: con sustitución o sin sustitución. El primer caso, considera que la probabilidad de sacar al azar un rey de una baraja de 52 cartas, volver a colocar la carta en la baraja, y luego sacar aleatoriamente otro rey. El segundo caso considera la probabilidad de sacar al azar un rey de la baraja, quedárselo, y a continuación volver a sacar al azar otro rey de las 51 cartas que quedan en la baraja. El último caso implica un tipo diferente de cálculo que el primero.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>A partir de la información suministrada, el docente debe proponer las siguientes consignas de trabajo para ser abordadas en el Material del Estudiante, organizando grupos de cuatro integrantes y haciendo uso de la baraja de cartas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Plantea dos situaciones de conteo y agrupación, en las que se haga uso de las permutaciones y de combinatorias.</li> <li>• Establece cinco situaciones en las que se solicite determinar probabilidades con y sin reposición.</li> <li>• Inventa un juego en el que establezcas una serie de reglas y se pueda determinar la probabilidad de ganar. Recuerda justificar tu propuesta.</li> </ul> <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>Cada uno de los grupos de trabajo, debe seleccionar un integrante para que socialice las respuestas dadas. Contando</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>con la participación de los integrantes de los otros grupos de trabajo, es importante que se experimente la realización de mínimo tres de los juegos planteados.</p>	
<p><b>Tarea</b></p> 	<p><b>Tarea</b></p>	<p>El docente, apoyado en el recurso, propone la siguiente tarea.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Indaga en relación a la existencia de juegos de azar típicos colombianos, en los que se tengan establecidas reglas para la realización de estos.</li> <li>• Establece dos situaciones de muestreo aleatorio con uno de esos juegos.</li> <li>• Es posible establecer situaciones de muestreo aleatorio con reposición en este juego.</li> </ul> <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>Posteriormente y con la participación de tu familia, da respuesta a las siguientes consignas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece un juego de azar.</li> <li>• Planteada mínimo tres reglas que regulen este nuevo juego.</li> <li>• Establece un plan de premios para las personas que participen en este juego.</li> <li>• Establece tres situaciones de muestro aleatorio que se relacionen con el nuevo juego.</li> </ul>	