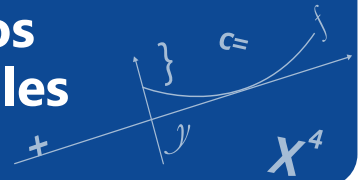


# Construcción de los números naturales, enteros y racionales



Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)

Grado 8:

UoL\_1: La recta numérica, un camino al estudio de los números reales  
 LO\_1: Descripción del conjunto de números naturales  
 LO\_2: Descripción del conjunto de números enteros  
 LO\_3: Descripción del conjunto de números racionales  
 LO\_4: Deducción de propiedades en las operaciones de números racionales

Se requiere para la clase los siguientes materiales:

- Una hoja de papel o cartulina
- Regla, compás y escuadra
- Lápiz, borrador y sacapuntas

Objetivos de aprendizaje

- Construir los números N,Z,Q y algunos I con regla y compás, para determinar su posición en la recta numérica
- Reconocer el conjunto de los naturales y los enteros, para su construcción con regla y compás
- Reconocer el conjunto de los racionales y su construcción con regla y compás

Habilidad / Conocimiento (H/C)

**SCO 1: Identifica gráficamente los números naturales y los enteros**

1. Reconoce el conjunto de números enteros y naturales
2. Determina procedimientos de construcción de los números naturales
3. Construye números naturales y enteros con regla y compás
4. Justifica con lenguaje matemático (notaciones, simbologías) la(s) construcción(es) hecha(s) con regla y compás
5. Realiza construcciones con programas interactivos para comprobar su procedimiento

**SCO 2: Representa geoméricamente los números racionales**

6. Reconoce el conjunto de números racionales y sus representaciones
7. Establece jerarquía entre los conjuntos de números N, Z y Q
8. Ubica en la recta numérica un número racional y viceversa
9. Determina procedimientos de construcción de los números racionales
10. Relaciona la división de segmentos con regla y compás con la construcción de números racionales
11. Construye números racionales con regla y compás
12. Justifica con lenguaje matemático (notaciones, simbologías) la(s) construcción(es) hecha(s) con regla y compás

13. Realiza construcciones con programas interactivos para comprobar su procedimiento
14. Representa cualquier número N y Z como fracción
15. Realiza operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números racionales en polinomios aritméticos
16. Realiza operaciones de radicación, potenciación y logaritmicación de números racionales en polinomios aritméticos
17. Usa las propiedades de las operaciones en los racionales para simplificar cálculos y realizar cálculo mental

**Flujo de aprendizaje**


**Introducción→Objetivos→Desarrollo→Resumen→Tarea**



1. **Introducción:** Reconociendo conjuntos numéricos(H/C 1, H/C 6, H/C 7)
2. **Objetivos de aprendizaje**
3. **Desarrollo:**
  - 3.1. **Actividad 1:** Reconociendo sistemas numéricos (H/C 1, H/C 2, H/C 6, H/C 7, H/C 9)
  - 3.2. **Actividad 2:** ¡A construir se dijo! (H/C 3, H/C 4, H/C 5, H/C 10, H/C 11, H/C 12, H/C 13)
  - 3.3. **Actividad 3:** Ubicando números en la recta numérica (H/C 8, H/C 14)
  - 3.4. **Actividad 4:** Resolviendo aprendo (H/C 15, H/C 16, H/C 17)
4. **Resumen:** Recordando lo aprendido
5. **Tarea**

**Lineamientos evaluativos**

Los estudiantes a través de las diferentes actividades de aprendizaje propuestas, pueden establecer jerarquía entre los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales. Además logran llevar a cabo la construcción geométrica de los anteriores números. También, desarrollarán la capacidad de realizar operaciones de números racionales como polinomios aritméticos de suma, resta, multiplicación, división, radicación, potenciación y logaritmicación, utilizando las propiedades respectivas de cada operación para realizar cálculos de forma ágil.




Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p><b>Introducción</b></p> 	<p><b>Introducción</b></p>	<p><b>Reconociendo Conjuntos Numéricos (H/C 1, H/C 6, H/C 7)</b></p> <p>El docente presenta un VIDEO que muestra en qué consiste cada uno de los conjuntos numéricos, naturales, enteros y racionales; luego a partir del video propone a sus estudiantes resolver las siguientes preguntas, para ser trabajados en grupos de máximo 3 integrantes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• De los números 13, <math>-2/4</math>, 9, y -17. ¿Cuáles pertenecen a los tres conjuntos numéricos (N, Z, Q)? ¿Por qué?</li> <li>• De los números 13, <math>-2/4</math>, <math>7/2</math>, y -17 ¿Hay algún número que pertenezca solo a dos de tales conjuntos? Justifique su respuesta.</li> <li>• Dados los números 7, -3, <math>1/5</math> determine en cada caso si el número es natural, entero o racional.</li> <li>• Establezca una jerarquía en términos de subconjuntos entre los conjuntos de números naturales, enteros y racionales.</li> <li>• ¿Existe un primer número natural? Justifica tu respuesta</li> <li>• ¿Existe un último número natural? Justifica tu respuesta</li> </ul> <p>Se requiere que una vez los estudiantes den la solución a los interrogantes, el docente realice la socialización en forma de debate, donde opine mínimo un estudiante por grupo. (Las dos últimas preguntas se abordaran con más amplitud en la siguiente actividad).</p> <p><b>El propósito de esta introducción es que los estudiantes logren reconocer los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales, y además puedan establecer la jerarquía existente entre los mismos.</b></p>	<p><b>Video</b> Sinopsis: en el video se presenta una breve descripción de cada uno de los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales, de modo que se evidencia la jerarquía entre los mismos. <b>Ver ANEXO 1</b></p> <p><b>Recurso Interactivo.</b> Contiene video y las preguntas de trabajo en relación al video observado.</p> <p><b>Material del estudiante</b> Contiene las preguntas de trabajo en relación al video observado.</p>

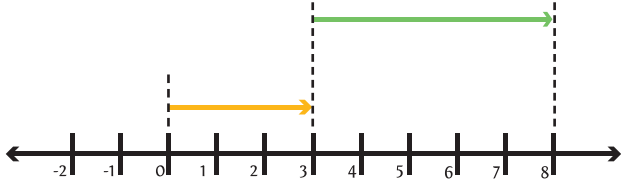
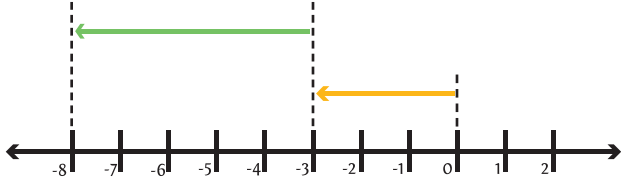
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Objetivos</p> 		<p><b>Objetivos de aprendizaje</b></p> <p>El docente, en compañía de los estudiantes, escribe los objetivos a los que creen que se debe llegar.</p> <p>Luego, el profesor presenta los objetivos propuestos para este objeto de aprendizaje. El docente puede explicar los objetivos si lo cree necesario y/o conveniente.</p>	
<p>Contenido</p> 	<p>El docente presenta el tema</p>	<p><b>Actividad 1: Reconociendo Sistemas Numéricos (H/C 1, H/C 2, H/C 6, H/C 7, H/C 9)</b></p> <p>El docente teniendo en cuenta lo trabajado en la introducción, da inicio a esta actividad retomando las concepciones que tienen los estudiantes respecto a las dos últimas preguntas allí trabajadas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Existe un último número natural (o el mayor de todos ellos)? Justifica tu respuesta</li> <li>• ¿Existe un primer número natural (o el menor de ellos)? Justifica tu respuesta</li> </ul> <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p><b>Números naturales</b></p> <p>Después que los estudiantes han discutido sobre estas preguntas, el docente les propone adoptar un punto de referencia para justificar las respuestas; por lo mismo expone lo siguiente:</p> <p>La construcción de los números naturales, o sea el estudio de sus propiedades, puede hacerse de manera axiomática: como en Geometría, se escogen unos pocos axiomas que recogen sus propiedades básicas, y a partir de ellos se deducen sus otras propiedades. Uno de tales sistemas axiomáticos fue propuesto en el siglo XIX por el matemático italiano Giuseppe Peano.</p>	<p><b>Recurso Interactivo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contiene las dos preguntas que se abordan al inicio de la introducción de los números naturales</li> <li>• Contiene los axiomas de Peano</li> </ul> <p><b>Ver ANEXO 2</b></p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>En seguida el docente apoyándose en el recurso explica la construcción de los números naturales basada en los axiomas de Peano.</p> <p>Luego de esta presentación el docente retoma las preguntas que se plantearon al inicio de esta actividad, de modo que se genere un pequeño debate donde al final se debe llegar a la siguiente conclusión.</p> <p>No hay ningún número natural que pueda ser considerado como el “último” o el mayor de ellos, pues para cualquier natural <math>N</math>, su sucesor <math>N^*</math> (o <math>N+1</math>) es mayor que él.</p> <p>En cuanto a la segunda pregunta, de acuerdo con los axiomas de Peano, el “primer” número natural es 0.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><b>Números enteros</b></p> <p>Para el desarrollo de este ítem, se ha tomado como referente el libro titulado Números Enteros, realizado por José Luis Gonzales (2002, p. 94).</p> <p>Después del reconocimiento de los números naturales, el docente realiza las siguientes fd</p> <p>Una vez los estudiantes den solución a las preguntas, se realiza una pequeña socialización, donde deben participar por lo menos 2 estudiantes.</p> <p>Al terminar la socialización el docente retoma las respuestas oportunas que hayan dado los estudiantes y concluye.</p> <p>Considere las siguientes ecuaciones:</p> <p>I. <math>x + 2 = 8</math>  II. <math>x + 8 = 2</math>  III. <math>x + 3 = 3</math></p>	

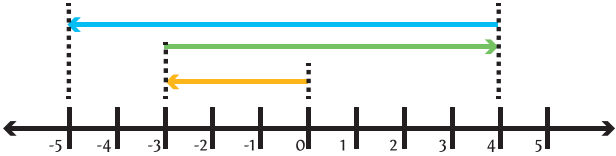
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>La primera ecuación tienen solución en los números naturales pues <math>x = 8 - 2</math>, por tanto <math>x = 6</math>, ahora la segunda ecuación no tienen solución en los números naturales, dado que <math>x = 2 - 8</math> por tanto <math>x = -6</math>, de esta forma se evidencia que la última ecuación da como solución un número que no está contenido en el conjunto de números naturales.</p> <p>El docente continúa. Por cuestiones como la anterior se ve la necesidad de definir nuevos números que den soluciones a estas ecuaciones; tales números son los negativos. De esta forma se introduce un nuevo conjunto numérico que a su vez incluye a los números naturales; este se denomina conjunto de los números enteros.</p> <p>Luego ecuaciones como <math>x + a = b</math>, con <math>a</math> y <math>b</math> enteros, tienen solución en el conjunto de los números naturales siempre y cuando <math>b</math> sea mayor que <math>a</math>; de lo contrario tendrán solución en el conjunto de los números enteros.</p> <p>En relación a la última pregunta que se realizó anteriormente, lo que se quiere es que el estudiante, logre reconocer aspectos de la vida diaria donde se utilizan los números enteros.</p> <p>Para continuar la presentación de números enteros, el docente propone las siguientes preguntas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Por qué razón 5 es menor que 7?</li> <li>• Entre los números -4 y 0 ¿cuál es menor? ¿Por qué?</li> <li>• Entre los números -20 y -7 cual es menor ¿Por qué?</li> <li>• Siendo <math>m</math> y <math>n</math> números enteros, ¿qué significa que <math>n</math> sea menor que <math>m</math>, (<math>n &lt; m</math>)?</li> </ul> <p>La socialización de las respuestas, debe darse de forma participativa, es decir que al menos 4 estudiantes den las respuestas.</p>	<p><b>Recurso Interactivo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contiene las preguntas que se abordan al inicio de la introducción de los números enteros</li> <li>• Contiene las ecuaciones</li> <li>• Contienen todas las imágenes de recta que se presentan durante la presentación de los enteros.</li> <li>• Contiene tanto las preguntas como las imágenes que hacen referencia a los desplazamientos en la recta numérica; preguntas que trabajara en conjunto con los estudiantes.</li> </ul> <p><b>Material del estudiante</b></p> <p>Contiene tanto las preguntas como las imágenes que hacen referencia a desplazamientos en la recta numérica. (Las situadas al final de la introducción de los enteros).</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Luego el docente retoma las respuestas adecuadas que hayan dado los estudiantes y explica que un número es mayor que otro si al realizar la diferencia del mayor menos el menor su resultado es positivo.</p> <p>De este modo <math>-7</math> es mayor que <math>-20</math>, dado que al realizar su diferencia el resultado es positivo <math>(-7 - (-20)) = -7 + 20 = 13</math>.</p> <p>Del mismo modo se dice <math>n</math> es menor que <math>m</math> porque la diferencia del mayor menos el menor es positiva, <math>(n &lt; m)</math> si y solo si <math>(m - n &gt; 0)</math>.</p> <p>Enseguida el docente indica a sus estudiantes que los números enteros estarán representados por un punto en la recta numérica (aspecto estático) o bien por una distancia, desplazamiento o vector (aspecto dinámico). Así al considerar dos puntos de referencia en una recta: el 0 y el 1, estando 1 a la derecha de 0, representando el segmento 01 la unidad de medida del desplazamiento; los enteros positivos como medidas de desplazamientos hacia la derecha y los enteros negativos como medidas de desplazamientos hacia la izquierda. Esto permite representar los números naturales (o enteros positivos), el cero y los enteros negativos en una "recta numérica". (El docente empleando en recurso muestra el siguiente gráfico).</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <p>Luego el docente resalta que otra forma de saber si un número es mayor que otro, es mediante el uso de la recta numérica: <b>a</b> y <b>b</b> son enteros entonces <math>a &lt; b</math>, esto significa que <b>a</b> está a la izquierda de <b>b</b>; ejemplo: el número 1 está ubicado a la derecha del 0; por lo tanto es mayor <math>(1 &gt; 0)</math>.</p>	



Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>De este modo se puede ver que, si <math>a</math> es menor que <math>b</math>, es porque <math>a</math> se encuentra a la izquierda de <math>b</math>.</p> <p style="text-align: center;">_____ a _____ b _____</p> <p>Para precisar lo anterior, el docente haciendo uso del recurso, presenta los siguientes dos ejemplos, para ser trabajados en conjunto con los estudiantes.</p> <p>Representar en la recta numérica los siguientes desplazamientos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Un objeto A se desplaza inicialmente 3 metros a la derecha, luego avanza otros cinco metros en la misma dirección ¿a cuantos metros se encuentra A de la posición inicial?</li> </ul> <p>El docente presenta la siguiente imagen para explicar el movimiento que realizó el objeto A.</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>El objeto B se desplaza inicialmente tres metros hacia la izquierda, luego avanza otros cinco metros en la misma dirección ¿a cuantos metros se encuentra el objeto B de la posición inicial?</li> </ul> <p>El docente presenta la siguiente imagen con la cual explica el movimiento que realizó el punto B.</p> 	



Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Enseguida el docente realiza la siguiente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué se entiende por valor absoluto?</li> </ul> <p>Después de que los estudiantes den sus respectivas respuestas, el docente propone entonces definir el valor absoluto de un número <math>n</math> como la distancia entre <math>n</math> y el cero y se denota <math> n </math>, así por ejemplo:</p> <p>El valor absoluto de <math>-3</math> es la distancia de <math>0</math> hasta <math>-3</math>, o sea <math>3</math>. En símbolos <math> -3  = 3</math>.</p> <p>El valor absoluto de <math>7</math> es la distancia de <math>0</math> hasta <math>7</math>, esto es <math> 7  = 7</math>.</p> <p>Luego el docente generaliza la definición anterior mediante la siguiente definición.</p> $ a  = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$ <p>En seguida el docente aclara que <math> a  = -a</math> si <math>a &lt; 0</math>: por ejemplo si <math>a = -3</math>, <math> -3  =  a  = -a = -(-3) = 3</math>, luego <math> -3  = 3</math>.</p> <p>Observe que <math>-a</math> es positivo cuando <math>a</math> es negativo.</p> <p>Finalizada la presentación, el docente propone a sus estudiantes las siguientes cuestiones para ser trabajadas en grupo y en su material.</p> <p>El objeto A realizó una serie de movimientos, los cuales se ilustran en la siguiente gráfica</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué puedes concluir a partir de la gráfica?</li> <li>• Describe mediante una operación, el movimiento que realizó el objeto A.</li> </ul>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Después de 2 desplazamientos que realice el punto B desde el origen, con la misma magnitud y sentido, el punto B se encuentra a 14 metros hacia la derecha; luego hizo un desplazamiento en sentido contrario de 4 veces dicha magnitud. ¿Cuál es la magnitud del primer desplazamiento y cuál es el punto final de la trayectoria?</li> <li>• ¿Cuál es el valor absoluto de h, si h es un entero negativo?</li> <li>• ¿Todo número entero es un número natural? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Todo número natural es entero? ¿Por qué?</li> </ul> <p>El docente da un tiempo prudente para que los estudiantes resuelvan las preguntas, una vez los estudiantes terminen se socializan las mismas.</p>	
		<p><b>Números Racionales</b></p> <p>Después que los estudiantes hayan trabajado las preguntas anteriores el docente procede a realizar la siguiente pregunta.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La ecuación <math>b \cdot x = a</math>, con a y b enteros ¿tiene solución en los números enteros? Justifica tu respuesta.</li> </ul> <p>El docente da un tiempo prudente para que los estudiantes analicen la pregunta, luego para socializarla escoge a mínimo tres estudiantes para que den su respectiva respuestas</p> <p>Posterior a la socialización, el docente recoge las respuestas acertadas que den los estudiantes, y concluye.</p> <p>La ecuación <math>3x = 4</math>, no tiene solución en los números enteros puesto que su solución (<math>x = 4/3</math>) no es un número entero.</p>	<p><b>Recurso Interactivo</b>          Contiene la pregunta que se aborda al introducir los números racionales. Las dos definiciones de números racionales.</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>De esta forma se ve la necesidad definir nuevos números que den solución a ecuaciones de este tipo; a tales números se les denomina números <b>racionales</b>. De esta manera se introduce un nuevo conjunto numérico que a su vez contiene a los números naturales y enteros.</p> <p>Por tanto ecuaciones como <math>\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}</math>, con <math>\mathbf{a}</math> y <math>\mathbf{b}</math> enteros y <math>\mathbf{b}</math> distinto de cero, tienen solución (<math>x = a/b</math>) en el conjunto de los números racionales.</p> <p>Luego de ello, el docente haciendo uso del recurso, explica que el conjunto de los números racionales se puede definir de la siguiente manera</p> $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ <p>Un número racional es todo aquel que puede representarse de la forma <math>p/q</math> donde <math>p</math> y <math>q</math> son números enteros con denominador distinto de cero; es decir <math>q</math> debe ser diferente de cero.</p> <p>Continuando, el docente agrega que también, <b>un número racional es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada, de todas ellas, se toma como representante canónico de dicho número racional a la fracción irreductible, la de términos más sencillo.</b> (Tomado de la página, wikibooks).</p> <p>En seguida el docente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Qué se entiende por representante canónico?</b></li> </ul> <p>En la socialización de la pregunta se debe llegar al acuerdo de que se llama representante canónico a la fracción <math>a/b</math> cuyo máximo común divisor entre <math>a</math> y <math>b</math> es 1.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Posterior a ello, el docente propone a sus estudiantes en grupos resolver las siguientes preguntas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿De cuantas formas se puede representar el número racional <math>[6/7]</math>?</li> <li>• El número racional <math>[2/3]</math> ¿a qué conjunto numérico representa?</li> <li>• Teniendo en cuenta que <math>a/b = c/d</math> si y solo si <math>a*d = b*c</math>, establezca cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:  <math>6/4=3/2</math>; <math>14/2=21/3</math>; <math>m/n = (km)/(kn)</math>, donde <math>k, m</math> y <math>n</math> pertenecen a los enteros.</li> </ul> <p>Una vez socializadas las preguntas, el docente explica a sus estudiantes que dos números racionales son el mismo racional si y solamente si las fracciones que lo representan son equivalentes, por ejemplo <math>14/2 = 21/3</math> porque <math>14*3 = 21*2</math>.</p> <p>Ahora si <math>a/b</math> y <math>c/d</math>, pertenecen a los racionales, entonces <math>a/b = c/d</math> si y solo si <math>a/b</math>, es equivalente a <math>c/d</math>, es decir <math>a*d = b*c</math>.</p> <p>Luego el docente agrega que el número racional <math>[2/3]</math>, representa al siguiente conjunto.</p> $\left[ \frac{2}{3} \right] = \left\{ \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2n}{3n} = \dots \right\} n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ <p>Luego el docente pregunta a sus estudiantes en general:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Al comparar los siguientes números racionales <math>(1/4)</math> y <math>(1/6)</math> ¿Cómo se obtienen fracciones con el mismo denominador?</b></li> </ul> <p>Al socializar la respuesta el interés es que los estudiantes en compañía del docente lleguen al acuerdo, de que el denominador común (M) debe ser un múltiplo común de los denominadores (es decir en los</p>	<p><b>Material del estudiante.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contiene las preguntas que se realizan después de la definición de los números racionales</li> <li>• Contiene las preguntas que finalizan la presentación de los racionales</li> </ul>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>fraccionarios <math>\frac{1}{4}</math> y <math>\frac{1}{6}</math>, un múltiplo común de los denominadores (el mcm) es <math>M=12</math>; después se hallan las fracciones equivalentes cuyo denominador sea <math>M</math>.</p> $\frac{1}{4} = \frac{1 * 3}{4 * 3} = \frac{3}{12} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6} = \frac{1 * 2}{6 * 2} = \frac{2}{12}$ <p>Una vez socializada la respuesta a la pregunta anterior, el docente realiza otra pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Qué procedimiento utilizarías para determinar de dos números racionales (<math>a/b</math>) y (<math>c/d</math>) cual es mayor?</b></li> </ul> <p>Una vez finalizada la discusión de la pregunta, se debe llegar a la siguiente conclusión:</p> <p><b>Un número es mayor que otro si al realizar la diferencia del mayor menos el menor su resultado es positivo, (concepto visto en los números enteros). Por ejemplo: <math>\frac{1}{2} &lt; \frac{3}{2}</math> pues <math>\frac{3}{2} - \frac{1}{2} &gt; 0</math>. En general, <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math>, si <math>\frac{c}{d} - \frac{a}{b} &gt; 0</math>.</b></p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Finalizada la presentación de los racionales, el docente propone a sus estudiantes resolver las siguientes preguntas en su material:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encontrar 5 fracciones equivalentes a las siguientes: <math>\frac{3}{4}</math>, <math>\frac{5}{8}</math>, y <math>\frac{7}{3}</math></li> <li>• Ordenar de mayor a menor los siguientes números racionales: <math>-\frac{6}{7}</math>, <math>-\frac{3}{2}</math>, y <math>-\frac{3}{5}</math>.</li> </ul>	


Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p><b>Actividad 2. ¡A Construir Se Dijo! (H/C 3, H/C 4, H/C 5, H/C 10, H/C 11, H/C 12, H/C 13)</b></p> <p>El docente inicia esta actividad invitando a sus estudiantes a que en los grupos realicen lo siguiente:</p> <p>Dibuje una recta y ubique dos puntos en ella, llame a uno de los puntos cero y al otro uno, con base en el segmento comprendido entre 0, 1 realiza lo siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizando el compás trasladar la unidad de medida por toda la recta (de forma secuencial), luego identificar los puntos en la recta y asociar a los números naturales.</li> <li>• Identifique puntos de esa recta asociados a los números enteros</li> <li>• Justifique el procedimiento utilizado para ubicar los números naturales y enteros en la recta numérica.</li> </ul> <p>Después de que los estudiantes hayan realizado la construcción de los números naturales y enteros con su respectiva justificación, el docente pide a uno de los grupos que indique como justificaron las construcciones. Luego acentúa que, teniendo en cuenta que el segmento 01 es el unitario, entonces la suma de n veces ese segmento unitario, es un segmento de longitud n.</p> $01 + 01 + 01 + \dots + 01_n = n \text{ veces } 01$ <p>Con el fin de que los estudiantes logren relacionar la división de segmentos con la construcción de los números racionales, el docente los invita a realizar la siguiente construcción:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sea AB un segmento</li> <li>2. Sea L una recta que pasa por A y no contiene a B</li> </ol>	<p><b>Recurso Interactivo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contiene los gráficos que dan cuenta de la construcción de la división de segmentos en partes iguales.</li> <li>• Contiene una animación en la cual se presenta paso a paso la construcción de los números naturales, enteros y racionales.</li> </ul> <p><b>Ver ANEXO 3</b></p> <p><b>Material del estudiante</b> Contiene las preguntas que se encuentran al inicio y al final de la actividad.</p>

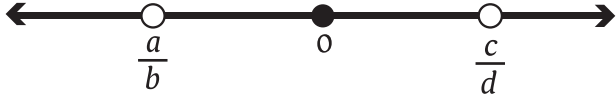



Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>3. Sea <math>m</math> un segmento unitario</p> <p>4. Utilizando el compás traslade 3 veces la unidad de medida <math>m</math>, a la recta <math>L</math>, iniciando en el punto <math>A</math>.</p> <p>Una vez los estudiantes lleguen al punto 4, el docente verifica que ellos estén realizando bien la construcción; luego presenta un grafico que da cuenta de la construcción hasta ese punto.</p> <p>5. Llame <math>p_1</math>, <math>p_2</math> y <math>p_3</math> a los tres puntos de corte que se forman al trasladar la unidad de medida <math>m</math>.</p> <p>6. Trace una recta (<math>L'</math>) que pase por los puntos <math>p_3</math> y <math>B</math></p> <p>7. Utilizando regla y escuadra trace una recta paralela a <math>L'</math> que pase por el punto <math>p_1</math>, llame <math>L_1</math> a la nueva recta.</p> <p>8. Llame <math>C</math> al punto de corte entre <math>L_1</math> con el segmento <math>AB</math>.</p> <p>Una vez los estudiantes terminen, el docente verifica la construcción que realizaron los mismos y finalmente presenta un grafico que da cuenta de la construcción.</p> <p>Posterior a ello el docente realiza las siguientes preguntas a sus estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Qué relación hay entre <math>AB</math> y <math>AC</math>?</b></li> </ul> <p>Una vez realizada la socialización, se espera que los estudiantes lleguen a la siguiente conclusión:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>AC/AB = A p_1/Ap_3 = 1/3</math></li> <li>• <math>AC = 1/3 (AB)</math></li> </ul> <p>Luego el docente propone resolver en grupo los siguientes puntos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En forma análoga a como procedió en el ejemplo anterior, represente en la recta numérica los números <math>1/4</math>, y <math>5/3</math></li> </ul>	




Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Ubique en la recta numérica el punto que le corresponde a cada uno de los siguientes números racionales: <math>1/3, 4/5, 8/7</math></li> <li>¿Cómo representarías el punto que le corresponde a <math>p/q</math> en la recta numérica, siendo <math>p</math> y <math>q</math> números enteros con <math>q</math> diferente de cero?</li> </ul> <p>Luego el docente realiza la socialización de las preguntas de tal forma que participen al menos 4 estudiantes.</p> <p>Posterior a ello el docente procede a explicar que para representar el número racional <math>p/q</math> en la recta numérica, el segmento <math>01</math> se debe dividir en <math>q</math> partes iguales, partes para después hacer una suma de <math>p</math> veces cada una de ellas.</p> <p>Luego para finalizar, el docente hace uso del recurso para presentar una animación donde se muestra la construcción de los números naturales, enteros y racionales.</p> <p>El docente primero muestra la animación que presenta la construcción de los naturales y enteros, una vez finalizada esta; pide a sus estudiantes que establezcan relación entre la construcción que realizaron ellos a lápiz y papel y la presentada.</p> <p>Posterior a ello el docente prosigue la presentación, en este caso además de presentar la construcción los números racionales, con ayuda del recurso digital se muestra la densidad de los mismos, para que los estudiantes puedan evidenciar que siempre existe un racional entre dos racionales. Una vez finalizada la presentación, el docente invita a sus estudiantes a que establezcan relaciones y diferencias entre la construcción realizada por ellos con la que se presento.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Actividad 3. Ubicando Números en la recta numérica (H/C 8, H/C 14)</p> <p>El docente da inicio a esta actividad indagando en relación a lo que los estudiantes conocen respecto a la ubicación de un número racional en la recta numérica, para ello presenta la siguiente imagen, y realiza a sus estudiantes las siguientes preguntas :</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué procedimiento realizarías para ubicar dichos números en la recta numérica?</li> <li>• ¿De los números racionales <math>\frac{5}{6}</math> y <math>\frac{7}{9}</math> cual es mayor? ¿Por qué?</li> <li>• Crees que es posible ubicar otro número entre los racionales <math>\frac{5}{6}</math> y <math>\frac{7}{9}</math>. Justifica tu respuesta.</li> </ul> <p>Se realiza la socialización de las preguntas de tal modo que participe al menos la mayoría de los estudiantes.</p> <p>En seguida el docente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Dados los números racionales <math>\frac{a}{b}</math> y <math>\frac{c}{d}</math> cuál es mayor? ¿Por qué?</li> </ul> <p>En la socialización, se debe llegar al siguiente acuerdo: <b>con los números racionales ocurre lo mismo que con los números enteros ubicados en la recta, es decir, si en la recta numérica 0 está a la izquierda de 1 entonces <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math> si <math>\frac{a}{b}</math> está a la izquierda de <math>\frac{c}{d}</math>.</b></p> <p>Luego el docente haciendo uso del recurso ilustra la siguiente imagen para precisar lo anterior, e indica que como el número racional <math>\frac{a}{b}</math> está situado a la izquierda de <math>\frac{c}{d}</math>, entonces <math>\frac{c}{d}</math> es mayor que <math>\frac{a}{b}</math> y <math>\frac{a}{b}</math> es menor que <math>\frac{c}{d}</math>.</p>	<p><b>Recurso Interactivo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contiene la imagen y las preguntas que se abordan al inicio de la actividad</li> <li>• Contiene todas las imágenes donde se muestra alguna representación en la recta numérica.</li> </ul> <p><b>Material del estudiante.</b> Contiene los últimos grupos de preguntas que se encuentra en la actividad.</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		 <p data-bbox="695 346 1047 388"><math>(a/b &lt; c/d)</math> y <math>(c/d &gt; a/b)</math></p> <p data-bbox="557 420 1149 520">Posterior a ello, el docente pide a sus estudiantes que en los grupos de trabajo, realicen lo siguiente:</p> <p data-bbox="557 556 1182 657">Representar en la recta numérica, los siguientes números racionales y ordenarlos de mayor a menor:</p> <p data-bbox="557 693 1128 730"><math>2/5, -1/4, 6/15, 7/6, -3/8, -1/5, 6/1, -7/1</math> y <math>-9/24</math></p> <ul data-bbox="557 766 1177 903" style="list-style-type: none"> <li>• ¿Es posible representar un número natural o entero en forma de fracción? ¿De manera única? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Todo número entero es racional?</li> </ul> <p data-bbox="557 934 1172 1035">Para socializar las preguntas se espera que los estudiantes en compañía del docente lleguen a la siguiente conclusión:</p> $a = \frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{3a}{3} = \dots = \frac{na}{n} \dots$ <p data-bbox="557 1176 1084 1245"><b>Donde a pertenece a los enteros y n pertenece a los enteros positivos.</b></p> <p data-bbox="557 1281 1120 1381">Con ello se evidencia que todo número natural y/o entero puede representarse como un número racional.</p> <p data-bbox="557 1417 1166 1591">Posterior a ello, el docente para que los estudiantes evidencien la densidad de los números racionales, realiza preguntas que conduzcan a los estudiantes a ese camino. Por lo cual pregunta:</p> <ul data-bbox="557 1627 1096 1696" style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cuál es el punto medio entre los números enteros 75 y 105?</li> </ul> <p data-bbox="557 1732 1133 1801">Se espera que los estudiantes concluyan que la mitad entre 75 y 105 es 90</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Luego el docente realiza otra pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿dada la siguiente gráfica, indica cuál es el punto medio entre los puntos a y b siendo estos números enteros?</li> </ul>  <p>Posible respuesta de los estudiantes:  <math>(b - a) / 2</math>.</p> <p>Luego el docente concluye que si tomamos el punto <math>a = 75</math> y <math>b = 105</math>, si aplicamos la fórmula :  <math>(b - a) / 2</math>, tendríamos: <math>(105 - 75) / 2 = 15</math>.  Con esta fórmula se calcularía el punto medio de la longitud del segmento <math>ab</math>, pero como se vio en el ejemplo el punto medio entre 75 y 105 es igual a 90.</p> <p>Por tanto una forma de hallar el punto medio entre dos números cualquiera se utilizamos la fórmula:</p> $a + (b - a) / 2 = (2a + b - a) / 2 = (a + b) / 2$ <p>Luego el docente realiza las siguientes preguntas para cerciorarse que los estudiantes están comprendiendo el tema:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Dado los siguientes pares de fracciones, ubícalas en la recta numérica, al igual que su punto medio:</b>  <math>(2/5</math> y <math>8/25)</math>, <math>(-1/3</math> y <math>-2/5)</math>, <math>(-7/10</math> y <math>-2/5)</math></li> <li>• <b>Dado los números a y b, que pertenecen a los racionales, con <math>a = m/n</math> y <math>b = p/q</math> halle el punto medio entre los dos números a y b, además ubíquelo en la recta numérica.</b></li> <li>• <b>¿Es racional el punto medio entre los anteriores racionales a y b?</b></li> </ul> <p>Una vez discutida las preguntas se debe llegar a la conclusión de que <math>(m/n + n/p) / 2 = (mq+np) / (2nq)</math>, luego al poderse representar como el cociente de enteros el punto medio es racional.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Seguidamente el docente realiza la siguiente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿El punto medio entre <math>a</math> y <math>b</math>, es el único racional que está entre <math>a</math> y <math>b</math>? ¿Por qué?</li> </ul> <p>Al socializar la respuesta el interés es que los estudiantes en compañía del docente lleguen al siguiente acuerdo:</p> <p>Sea <math>c</math> ese punto medio entre <math>a</math> y <math>b</math> entonces como <math>a &lt; c</math> y <math>a, c</math> son racionales, su punto medio <math>c_1</math> es racional, luego como <math>a &lt; c_1</math> y <math>a, c_1</math> son racionales, su punto medio <math>c_2</math> es racional. Este proceso puede continuar de manera indefinida.</p> <p>Enseguida el docente puntualiza explicando lo siguiente:</p> <p>Entonces, entre <math>a</math> y <math>b</math> hay infinitos racionales como lo sugiere la siguiente gráfica:</p>  <p>Por tanto si <math>a</math> y <math>b</math> son racionales y <math>a &lt; b</math>, entonces hay por lo menos otro racional <math>c</math> que está entre <math>a</math> y <math>b</math> (realmente hay infinitos), es decir <math>a &lt; c &lt; b</math>. Un conjunto en el que ocurre esto se llama denso; por tanto los racionales son densos.</p> <p>Posterior a ello, el docente invita a los estudiantes a que en grupo, realicen las siguientes cuestiones:</p> <p>Ubicar en la recta los números <math>7</math> y <math>9</math>, halle el punto medio entre ellos, una vez hallado nómbrale <math>A_1</math>, ahora encuentra el punto medio entre <math>A_1</math> y <math>7</math> y nómbrale <math>A_2</math>, luego encuentra el punto medio entre <math>A_2</math> y <math>7</math> y nómbrale <math>A_3</math>. De forma análoga se puede construir los números <math>A_4, A_5</math> y en general <math>A_n</math>. De acuerdo a ello responde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Son racionales los números <math>A_4</math> y <math>A_5</math> y en general <math>A_n</math>?</li> </ul>	


Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cuántos números racionales hay entre 7 y 9?</li> <li>• ¿Se puede encontrar el primer número racional positivo?</li> </ul> <p>Luego de socializar las preguntas, el docente acentúa explicando lo siguiente:</p> <p><b>Si hubiese un primer racional positivo, digamos P, ¿Hay racionales entre 0 y P? ¿Qué se deduce de eso?</b></p> <p>El docente da un tiempo adecuado para que los estudiantes respondan; finalmente aclara que como se obtiene una contradicción, hay racionales positivos menores que el supuesto primer racional positivo, por ende no existe un “primer” racional positivo. Por lo mismo no hay un número siguiente o anterior a cada racional.</p>	
		<p><b>ACTIVIDAD 4. Resolviendo Aprendo (H/C 15, H/C 16, H/C 17)</b></p> <p><b>Las 4 operaciones básicas</b></p> <p>Para llevar a cabo esta activada, el docente inicia indagando respecto a lo que los estudiantes recuerdan de las propiedades de las operaciones; para ello realiza las siguientes preguntas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué propiedades cumplen las operaciones de suma y multiplicación en el conjunto de los números racionales?</li> <li>• Si un polinomio aritmético no tiene signos de agrupación, ¿qué pasos se deben seguir para resolverlo?</li> <li>• Si el polinomio tiene signos de agrupación, ¿qué pasos se deben seguir para resolverlo?</li> </ul>	


Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Posterior a la socialización de estas preguntas, el docente para formalizar las respuestas oportunas que hayan dado los estudiantes, haciendo uso del recurso presenta las propiedades de las operaciones suma y multiplicación.</p> <p>Luego el docente haciendo uso de las propiedades de cada operación, en compañía de los estudiantes resuelve los siguientes ejercicios:</p> $\left(\frac{4}{7} \times \frac{5}{8} \div \frac{3}{8}\right) \text{ y } \left(\frac{5}{16} + \frac{13}{16} - \frac{3}{8}\right)$ <p>Seguido de ello, el docente realiza la siguiente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Para ustedes qué es un polinomio aritmético?</b></li> </ul> <p>Al socializar la respuesta se debe llegar a la siguiente conclusión: <b>un polinomio aritmético es una expresión que combina operaciones y son aritméticos porque las operaciones solo involucran números, es decir no hay variables.</b></p> <p>Posterior a ello, haciendo uso del recurso el docente presenta a sus estudiantes el siguiente ejercicio mal resuelto, luego propone a los mismos que identifiquen cuál fue el error que se cometió al resolver este ejercicio.</p> $\begin{aligned} & \frac{5}{6} + \frac{2}{9} \div \frac{1}{2} - \frac{7}{9} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{19}{18} \div \left(-\frac{5}{18}\right) \times \frac{3}{4} \\ &= -\frac{19}{5} \times \frac{3}{4} = -\frac{57}{20} \end{aligned}$ <p>Al socializar la respuesta se debe llegar al siguiente acuerdo: cuando se tienen operaciones como la presentada anteriormente, es decir sin signos de agrupación lo primero que se realiza es la multiplicación y división, finalmente sumas y restas.</p>	<p><b>Recurso Interactivo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente contará con las propiedades de cada una de las operaciones que se llevaran a cabo.</li> <li>• Contará con la tabla que contiene operaciones, (la que se encuentra al final de esta actividad)</li> </ul> <p><b>Ver ANEXO 4 y 5</b></p> <p><b>Material del estudiante.</b> Contiene cada uno de los ejercicios que se realizan al final de cada punto.</p>



Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Ahora, si lo que se tiene es un polinomio con signos de agrupación, lo primero que se realiza son las operaciones que están dentro de los paréntesis, del mismo modo si hay paréntesis dentro de paréntesis se deben “resolver” de adentro hacia afuera, luego se procede de la misma forma que la anterior.</p> <p>Posterior a ello, el docente propone a sus estudiantes realizar los siguientes ejercicios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El resultado de la siguiente operación es <math>(-993/280)</math>, indique qué procedimiento se siguió para llegar a tal solución.</li> </ul> $\left( \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \div \frac{8}{1} \times \frac{9}{3} - \frac{16}{4} \right)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicando las propiedades de cada operación resolver el siguiente polinomio aritmético.</li> </ul> $\frac{11}{18} \div \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right) \times \frac{5}{2} + \left( \frac{7}{8} + \frac{2}{4} \right)$ <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p><b>Otras operaciones</b></p> <p>Luego de que los estudiantes resuelvan los ejercicios anteriores, el docente los invita a resolver la siguiente pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Resuelva el siguiente ejercicio y diga qué propiedad puede aplicar para calcular el logaritmo:</b></li> </ul> $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} \times \frac{7^2}{4^2} + \log \frac{4}{6} =$ <p>Al realizar la socialización se puede generar un pequeño debate con las respuestas que den los estudiantes; luego el docente hace uso del recurso, para acentuar las propiedades de cada una de las operaciones en cuestión.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados																
		<p>Seguido de ello, el docente en conjunto con los estudiantes resuelve el ejercicio anterior, enfatizando en las propiedades que se deben tener en cuenta para llegar a la solución.</p> <p>Luego invita a los estudiantes a realizar las siguientes operaciones, haciendo uso de las propiedades.</p> $\frac{\sqrt[5]{3125}}{8^2} \times \frac{3^2}{\sqrt[3]{8}} + \log \left( \frac{4}{6} \right) - \frac{9}{63}$ $\frac{\sqrt{16}}{8^2} \times \frac{3^2}{\sqrt[3]{8}} + \log \left( \frac{125}{25} \right) + \frac{48}{30}$ <p>Plantear y resolver un ejercicio similar a los que se han venido trabajando, que involucre 5 de las operaciones, entre ellas potenciación y la logaritmación.</p> <p>Después de ello el docente con la intención de generar destrezas en sus estudiantes en cuanto al cálculo mental, haciendo uso del recurso, realiza las siguientes pregunta a sus estudiantes de forma dinámica y aleatoria.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Cuál es el resultado de:</b></li> </ul> <table border="1" data-bbox="561 1297 1180 1942"> <tbody> <tr> <td><math>\frac{4}{2} = 2</math></td> <td><math>\frac{4}{2} + \frac{15}{3} = 7</math></td> <td><math>\frac{4}{2} \times \frac{15}{3} = 10</math></td> <td><math>\frac{4}{2} \div \frac{15}{3} = \frac{2}{5}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\frac{15}{3} = 5</math></td> <td><math>\frac{4}{2} + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}</math></td> <td><math>\frac{4}{2} \times \frac{15}{2} = 15</math></td> <td><math>\frac{7}{1} \div \frac{21}{3} =</math></td> </tr> <tr> <td><math>\frac{63}{7} = 9</math></td> <td><math>\sqrt{\frac{63}{7} + \frac{48}{6}} = 11</math></td> <td><math>\sqrt[2]{\frac{48}{6} \times \frac{63}{7}} = 18</math></td> <td><math>\frac{63}{7} - \frac{48}{6} = 1</math></td> </tr> <tr> <td><math>\frac{48}{6} = 8</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{2} + \frac{15}{3} = 7$	$\frac{4}{2} \times \frac{15}{3} = 10$	$\frac{4}{2} \div \frac{15}{3} = \frac{2}{5}$	$\frac{15}{3} = 5$	$\frac{4}{2} + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}$	$\frac{4}{2} \times \frac{15}{2} = 15$	$\frac{7}{1} \div \frac{21}{3} =$	$\frac{63}{7} = 9$	$\sqrt{\frac{63}{7} + \frac{48}{6}} = 11$	$\sqrt[2]{\frac{48}{6} \times \frac{63}{7}} = 18$	$\frac{63}{7} - \frac{48}{6} = 1$	$\frac{48}{6} = 8$				
$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{2} + \frac{15}{3} = 7$	$\frac{4}{2} \times \frac{15}{3} = 10$	$\frac{4}{2} \div \frac{15}{3} = \frac{2}{5}$																
$\frac{15}{3} = 5$	$\frac{4}{2} + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}$	$\frac{4}{2} \times \frac{15}{2} = 15$	$\frac{7}{1} \div \frac{21}{3} =$																
$\frac{63}{7} = 9$	$\sqrt{\frac{63}{7} + \frac{48}{6}} = 11$	$\sqrt[2]{\frac{48}{6} \times \frac{63}{7}} = 18$	$\frac{63}{7} - \frac{48}{6} = 1$																
$\frac{48}{6} = 8$																			

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Para obtener las respuestas, el docente primero pregunta a sus estudiantes por:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Cuál es el resultado de <math>4/2</math>?</b></li> </ul> <p>Una vez obtenida la respuesta por parte de los estudiantes prosigue preguntando:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>¿Cuál es el resultado de <math>15/3</math>?</b></li> </ul> <p>Luego pregunta por cada una de las operaciones que están en la primera fila.</p> <p>Del mismo modo continúa la dinámica con la fila que sigue.</p> <p>Cada vez que los estudiantes den la respuesta adecuada el docente casi que de inmediato formula la siguiente operación a resolver.</p>	
<p><b>Resumen</b></p> 	<p><b>Resumen</b></p>	<p>Actividad: recordando lo aprendido.</p> <p>El docente haciendo uso del recurso realiza las siguientes preguntas, las cuales van a ser trabajadas en los mismos grupos que conformaron los estudiantes durante toda la actividad:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué conjuntos numéricos están contenidos dentro del conjunto de los números racionales? Esboce un grafico que dé cuenta de ello</li> <li>• ¿Cuál es el siguiente de un número natural y/o entero?</li> <li>• Si nos dan dos números racionales, ¿cómo encontrar otro racional entre los dos?</li> <li>• Ubica en la recta numérica los siguientes pares de números racionales al igual que su punto medio:  (<math>6/9</math> y <math>7/1</math>), (<math>8/12</math> y <math>-2/3</math>), (<math>-1/5</math> y <math>-3/4</math>)</li> <li>• Dado dos números racionales distintos, <math>X = 7/8</math>, y un <math>Y = 4/7</math>, siendo <math>X &lt; Y</math> ¿cuál es el punto medio entre ellos?</li> </ul>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelva los siguientes polinomio aritmético, haciendo uso de las propiedades de cada operación:</li> </ul> $\frac{5^2}{\sqrt[3]{15}} + \log_3 \frac{81}{1} \div \frac{16}{2^4} =$ $\frac{16}{8} \times \left( \frac{9}{2} + \frac{24}{12} \right) + \frac{48}{30} \div \frac{81}{1} =$	
<p><b>Tarea</b></p> 	<p><b>Tarea</b></p>	<p><b>Investiga:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿Son densos los números naturales? Justifica tu respuesta</li> <li>¿Son densos los números enteros? Justifica tu respuesta</li> <li>¿Los números racionales ocupan todos los puntos de la recta?</li> <li>¿La raíz cuadrada de 2 es un número racional? Justifica tu respuesta.</li> </ul>	

## Anexo 1

En el siguiente enlace se encuentra la descripción del video, para elaborar el guión:

<https://www.youtube.com/watch?v=vvsdX1H3Ujk>

El formato del en el que se requiere el video es en forma de noticiero. Teniendo en cuenta los tiempos (0.30 - 0.38), (1.06 - 1.51) (4.22 - 5.31).

(La idea no es que se presente el mismo video que se puede apreciar siguiendo la dirección mencionada arriba, sino que con base en ese elaboren uno en forma de noticiero).

## Anexo 2

### Construcción de los Números Naturales

#### LOS AXIOMAS DE PEANO

Para caracterizar los números naturales, Peano propuso los cinco axiomas siguientes:

**(axioma 1)** El 0 es un número natural.

**(axioma 2)** Si  $n$  es un número natural, entonces el sucesor de  $n$  también es un número natural.

**(axioma 3)** El 0 no es el sucesor de algún número natural.

**(axioma 4)** Si hay dos números naturales  $n$  y  $m$  con el mismo sucesor, entonces  $n$  y  $m$  son el mismo número natural.

**(axioma 5) (Principio de inducción matemática)** Si el 0 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.

A partir de estos axiomas se pueden definir la suma y la multiplicación de números naturales, relaciones entre ellos como:  $a < b$  si  $b - a$  es un número natural y deducir, por ejemplo, que el sucesor de  $n$  es  $n + 1$ , que  $n < n^*$ , y  $5 < 8$  porque  $8 - 5 = 3$  es natural.

Paso a paso para la realización de la construcción animada utilizando un programa interactivo, de los conjuntos numéricos naturales y enteros.

### Paso a paso para realizar animación en un ambiente dinámico de los números naturales

1. Construye una recta y llámala  $r$ , además nombra al punto de inicio  $0$
2. Traza un segmento  $CD$  exterior a la recta  $r$ , considera el segmento  $CD$  como unidad de medida.
3. Utilizando el compás, traslada la unidad de medida a la recta  $r$ , partiendo del punto de origen  $0$ .
4. El punto de intersección a la derecha de  $0$ , nómbralo  $1$ .
5. A partir del segmento  $01$  y teniendo en cuenta la sucesión en los números naturales, con ayuda del compás se sigue añadiendo segmento de longitud igual a  $CD$ .
6. Finalmente asocia a cada uno de dichos puntos los números naturales.

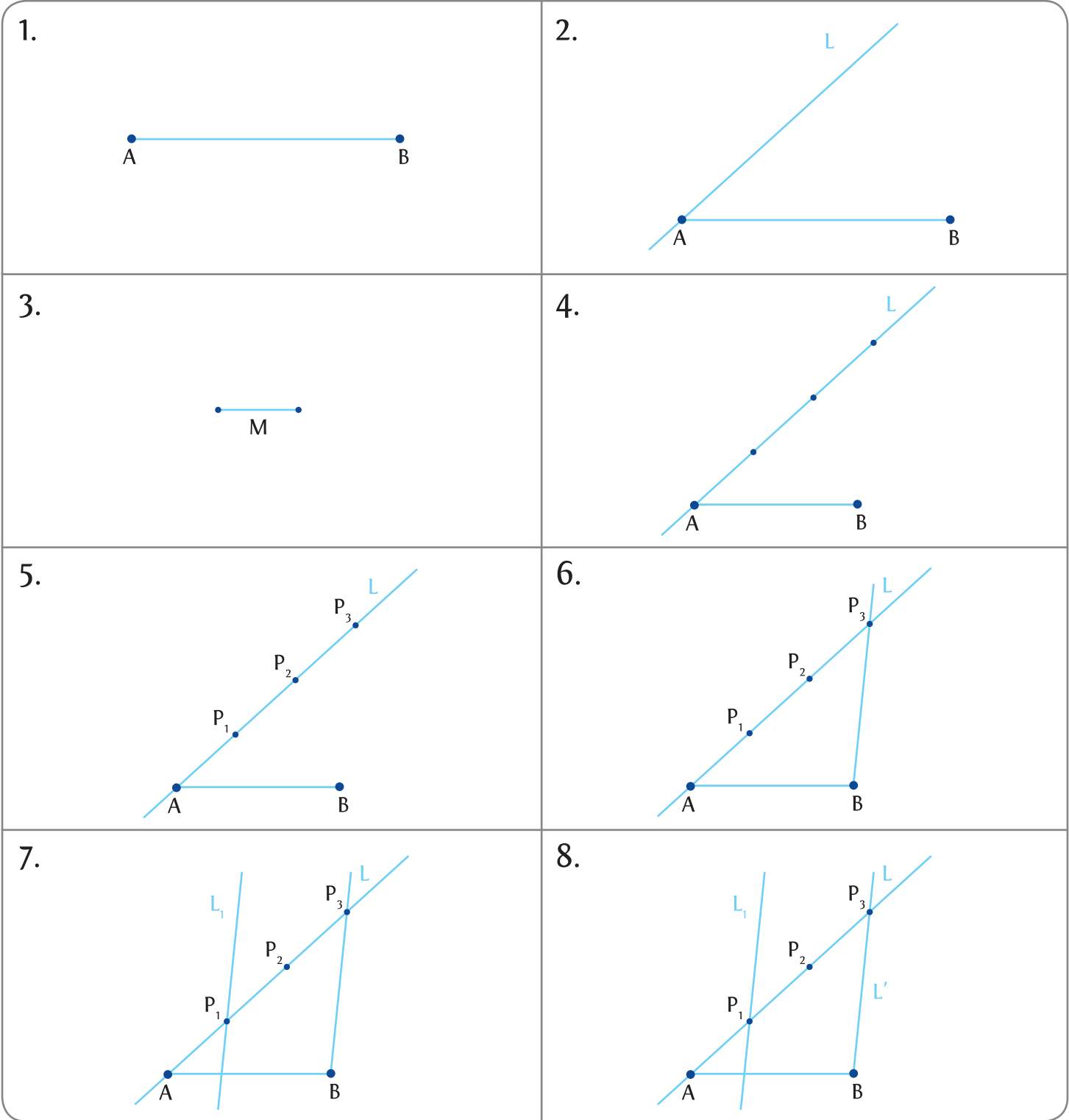
### Paso a paso para realizar animación en un ambiente dinámico de los números enteros

1. Construye una recta y nómbrala  $r$ , además ubica un punto en la recta de modo que la divida en dos partes iguales, nómbralo  $0$
2. A la derecha del punto  $0$  se realiza el mismo procedimiento que para los números naturales.
3. Sobre la recta a la izquierda de  $0$ , se realiza un proceso análogo al que se realizó con los naturales, a la derecha de la misma recta.
4. Luego se asocia los números enteros a cada punto de la recta.

### Paso a paso para realizar animación en un ambiente dinámico de los números racionales

1. Trace una recta y llámela  $r$ .
2. Escoja un punto de la recta y llámelo cero.
3. Escoja un punto a la derecha del cero y llámelo uno (siendo el segmento  $01$  la unidad de medida).
4. Para representar los racionales en la recta numérica, el segmento  $01$  se debe dividir en  $q$  partes iguales, y se toma  $p$  veces  $1/q$  siendo  $q$  positivo.

### 3.1 Construcción correspondiente a la actividad 2





Propiedades

Propiedades de la Suma	Propiedades de la Multiplicación	Propiedades Potenciación
<p>Con el mismo denominador:</p> $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ <p>Con distinto denominador:</p> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ <p>Asociativa:</p> $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ <p>Conmutativa:</p> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ <p>Elemento neutro:</p> $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ <p>Elemento opuesto:</p> $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$	<p>Multiplicación:</p> $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ <p>Asociativa:</p> $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$ <p>Conmutativa:</p> $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ <p>Elemento neutro:</p> $\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$ <p>Distributiva:</p> $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$ <p>Inverso multiplicativo de a/b es b/a porque:</p> $a/b * b/a = 1$ <p><b>Definición de división:</b></p> $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{c \times b}$	<p>Potencia:</p> $(a/b)^n = a^n/b^n$ $(a/b)^0 = 1$ $(a/b)^1 = (a/b)$ $a^m/b^m = (a/b)^m$ $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$ <p>Producto de potencias con la misma base:</p> $(a/b)^n * (a/b)^m = (a/b)^{n+m}$ <p>División de potencias con la misma base:</p> $(a/b)^n = a^n/b^n$ <p>Potencia de una potencia:</p> $((a/b)^n)^m = (a/b)^{m*n}$ <p>Cociente de potencias con el mismo exponente:</p> $(a/b)^n / (c/d)^n = ((a * d) / (b * c))^n$
<p><b>Raíz</b></p>	<p><b>Logaritmo</b></p>	
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n*m]{\frac{a}{b}}$	<p><math>\log a \times b = \log a + \log b</math></p> <p><math>\log \frac{a}{b} = \log a - \log b</math></p> <p><math>\log a^n = n * a</math></p> <p><b>a y b son positivos</b></p>	<p>En cada caso, el docente debe aclarar que por definición de los racionales, los denominadores son distintos a cero.</p>

**Aparecen los números de la tabla de la siguiente forma:**

Primero aparece la primera operación que es  $4/2$ , una vez obtenida la respuesta, el docente da clic para que aparezca la segunda operación que es  $15/3$ , luego de obtener la respuesta nuevamente el docente a clic para que aparezca la siguiente operación  $\frac{4}{2} + \frac{15}{3} = 7$  y así sucesivamente la información va apareciendo poco a poco.