Grado 11

Matematicas - Unidad 1

Operando con el conjunto de los números reales

Tema

Construcción de algunos números irracionales

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

En matemáticas, como en otras ciencias, lo desconocido ha sido sinónimo del despertar de un sin número de emociones, las cuales solo quieren respuestas. Campos como las artes, la arquitectura, la botánica, la geometría, e incluso el estudio del universo se han visto envueltos en descubrimientos sorprendentes a partir de la pregunta inquieta por lo desconocido. De lo anterior, hechos como la aparición de las formas, la estructura de las hojas de los tallos de las plantas, la forma de los cuernos de los carneros, el rostro de la mona Lisa, la estructura de las conchas de los caracoles y algunos moluscos, etc.; se hayan visto, todos, relacionados por un único valor llamado el número áureo o la divina proporción.

Distintos descubrimientos relacionados con los números nos vienen en el día a día, sobre todo los relacionados con los números más raros del sistema de los números reales: los Irracionales. De los cuales todo parece desprenderse. De allí que la disposición de los pétalos de las rosas, la definición de los agujeros negros, etc., se vean todas ligados a un número llamado phi (el cual posee infinitos decimales), por ejemplo.

De lo anterior se tiene que los números irracionales nos proporcionan importante información acerca del comportamiento de algunos objetos de la naturaleza, las relaciones que uno o varios objetos tienen, la cría de conejos, la ramificación de las plantas, etc.

Te invitamos a conocer mucho más de los atributos de los números racionales, a partir de una serie de recursos que se te irán mostrando y la aplicación de estos en distintas situaciones.

Actividad Introductoria: ¿Qué? ¿Hay más números?

1. **Lee previamente las preguntas que se colocan a continuación y observa con mucha atención el video que te proyectará el docente. Toma nota de los aspectos que consideres relevantes para responder a las mismas en los espacios asignados.**

   a. ¿A qué hace alusión la palabra Fibonacci en el video?

b. ¿Cómo empezaron a aparecer los números irracionales?

c. ¿Qué opinas de los números irracionales?

d. ¿Por qué el número $\sqrt{2}$ es irracional? ¿Cómo puede asegurarlo? ¿es $\sqrt{2} = 1.4142$?

2. Socializa a tus compañeros las respuestas que diste apoyado en la actividad realizada. Luego presta mucha atención a lo explicado por el docente acerca de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

3. **Teniendo en cuenta lo visto anteriormente, ¿Qué crees que lograremos al final de esta clase? Responde en el espacio y socializa tu respuesta.**

4. **Ahora contrasta lo que han socializado con los objetivos que propone el docente.**

Objetivos

- **Construir algunos números I con regla y compás, para determinar su posición en la recta numérica.**
  - » Reconocer el conjunto de los irracionales a partir de procesos históricos.
  - » Clasificar los números irracionales y sus propiedades.
  - » Construir algunos irracionales con regla y compás.

Construyendo los números Irracionales (I).

Actividad 1: ¿Cómo diferenciar los números irracionales (I)?

1. Recuerdas la diferencia entre los números racionales y los números irracionales? Pues bien, por medio del siguiente ejercicio podrás tener un primer acercamiento. Responde a las preguntas y socialízalas con el docente y tus compañeros.

a. Encuentra la expresión decimal de 7/4 y 4/7

b. Encuentra la expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333...

c. ¿Qué puedes concluir con los anteriores resultados?

2. De acuerdo al ejercicio anterior y la explicación del docente, identifica los errores obtenidos (según el caso) y realiza las debidas correcciones.

3. Piensa en una respuesta para la siguiente pregunta:

Pero, ¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?

4. Con lo trabajado hasta el momento, responde la siguiente pregunta y sugiere otros números irracionales que creas o conozcas.

¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?

Actividad 2: Cuadrados y cubos perfectos, ¿imperfectos?

1. Después de haber revisado las ideas previas que el docente te ha mostrado, realiza la siguiente actividad.

a. ¿Qué resultado se obtiene al realizar la siguiente operación: $\sqrt{2+1/2}$?

b. ¿A qué conjunto numérico pertenece el anterior resultado?

c. Y si le sumamos otro número racional cualquiera a $\sqrt{2}$, ¿a qué conjunto numérico pertenece el resultado?

d. ¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$?

2. ¡Afiancemos un poco las ideas! Presta mucha atención a las explicaciones del docente y luego responde a la pregunta planteada:

a. ¿Existe algún otro número irracional diferente a $\sqrt{2}$, aparte de los vistos?

b. Resuelve las raíces y responde cada ítem:

$\sqrt{4}$ = $\sqrt{9}$= $\sqrt{64}$ = $\sqrt{196}$=

c. ¿Qué tienen en común estas raíces cuadradas?

d. ¿La raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros?

e. $\sqrt{4} = 2$ Porque $2^2 = 4$. Ahora $\sqrt{2} = ?$

Busquemos un número que al elevarlo al cuadrado nos de 2:

$1^2 =$ $\quad 1.4^2 =$ $\quad 1.41^2 =$ $\quad 1.42^2 =$

f. De acuerdo a lo anterior, ¿Qué conclusión puedes sacar?

3. Con base en la explicación hecha por el docente, piensa en lo siguiente y socializa tus respuestas.

a. ¿Cuáles raíces cúbicas tienen solución en los racionales?

b. Da tres ejemplos de raíces cúbicas que sean irracionales y explique por qué.

c. ¿Será que todos los irracionales tienen la forma de raíz inexacta?

Actividad 3: ¿Algebraicos? ¿Trascendentes? Descubre más Irracionales.

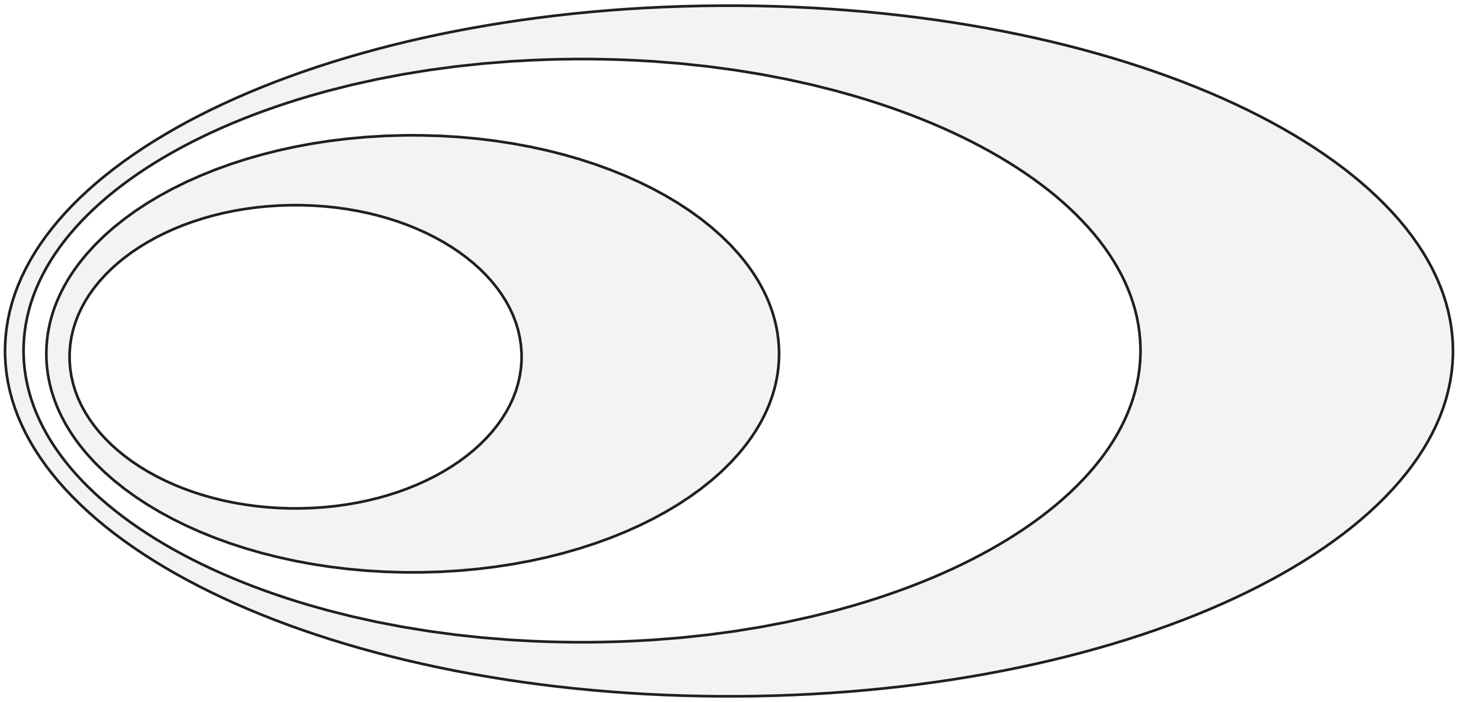
1. En la siguiente tabla deberás marcar con una X, el conjunto o los conjuntos a los cuales crees, pertenecen los números dados. Luego organiza el diagrama. Socializa tus respuestas.

Número	N	Z	Q	I
-8				
$\sqrt{10}$				
5				
127				
-17				
36				
$\sqrt[8]{8}$				
$3\sqrt{2}$				
8,36				
$93,\overline{18}$				
-5,21				
7,8				
$5+\sqrt{3}$				
-46				
$\sqrt{3}*\sqrt{3}$				

2. **De acuerdo al trabajo realizado hasta aquí, ubica cada recuadro en el diagrama, según consideres.**

Reales | **...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...** | **Enteros** | **1, 2, 3...** | **$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, ϕ, e**

Naturales | **1/2 , 2/3, 8/9** | **Racionales** | **Irracionales**



3. **Para el siguiente ejercicio es importante que recuerdes cómo resolver algunas ecuaciones simples. Ahora responde.**

a. ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x-2 = 0$?

b. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2-3 = 0$?

c. ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero?

d. ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo?

e. ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo?

4. Empleando lo trabajado hasta aquí y la explicación del docente realiza las correcciones (en caso de ser necesario) y escribe las conclusiones.

5. Responde.

a. ¿Cuáles de los siguientes números son algebraicos? ¿Por qué?

$$2, \quad -5, \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}, \quad \sqrt[8]{8}$$

b. ¿Existe alguno que NO sea algebraico? (completa tu respuesta con lo expuesto por el docente)

c. Si un número trascendente no es algebraico y todo racional es algebraico, ¿habrá algún número trascendente que sea racional?

4. Presta atención a la explicación del docente y replica el mapa conceptual.

Actividad 4: Trabajando con los Irracionales.

1. El objetivo ahora es realizar cálculos con números irracionales, sin embargo revisemos algunas ideas. Luego comienza a resolver el ejercicio planteado.

Sumar o restar

Solo se realiza entre cantidades irracionales semejantes utilizando el método de factor común.

- $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
- $3\pi - 7\pi + 2\pi = 2\pi$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ no se podría resolver porque no tiene factor común.

Multiplicar o dividir

Se siguen las reglas del algebra, la radicación o potenciación según el caso.

- $3\pi.7\pi^3 = 21\pi^4$
- $12\pi^3/3\pi = 4\pi^2$
- $\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3})^2 = 4.3 = 12$
- $\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4.(\sqrt{3}.\sqrt{3}) = 4.\sqrt{3.3} = 4.\sqrt{9} = 4.3 = 12$
- $\sqrt{3}.4\sqrt{3} = \sqrt{3}.\sqrt{3.4^2} = \sqrt{3}.\sqrt{48} = \sqrt{3.48} = \sqrt{144}$ $=12$
- $\sqrt[2]{5}.\sqrt[3]{6} = \sqrt[2.3]{5^3}.\sqrt[3.2]{6^2} = \sqrt[6]{125}.\sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{125.36}$ $= \sqrt[6]{4500}$

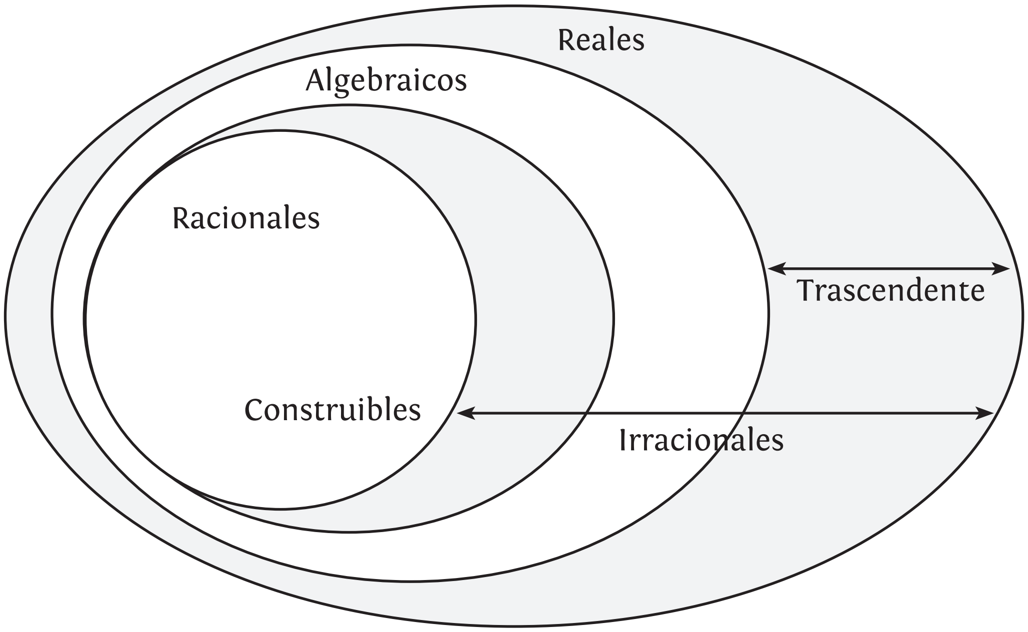
2. Resuelve los siguientes ejercicios.

- $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} =$
- $\sqrt{8} - \sqrt{8} =$
- $\pi.1/\pi =$
- $\sqrt{5}e + 7\sqrt{5} =$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Actividad 5: ¡Ahora si! Construyamos algunos Irracionales.

1. **El objetivo ahora es construir con regla y compás algunos números irracionales, pero antes recordaremos: la distribución de los números construibles, la construcción geométrica de los racionales y de los irracionales.**

   a. Observa la ilustración y su explicación.

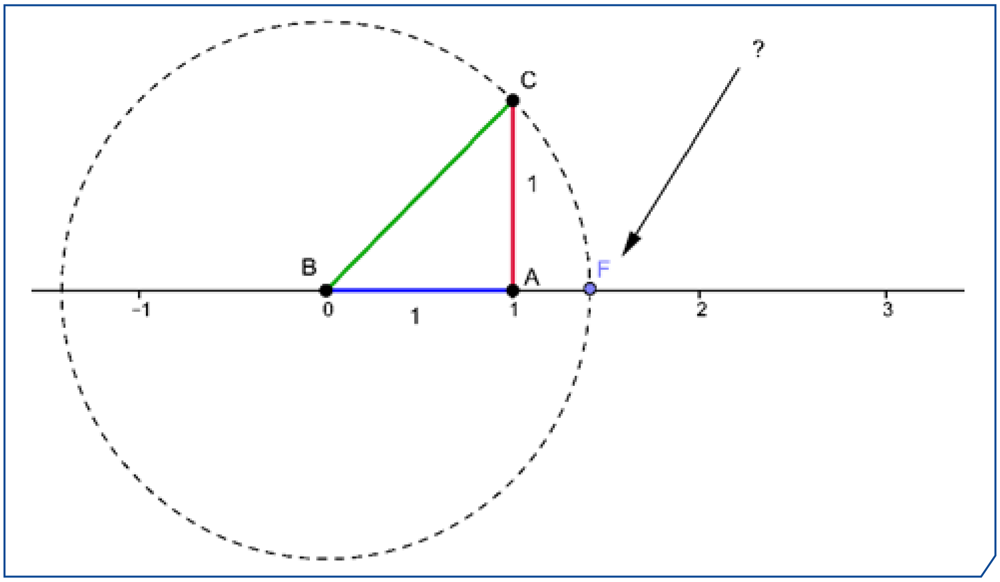


¿Qué observamos en la gráfica?

- Los números construibles son números algebraicos.
- No todos los algebraicos son construibles.
- Los trascendentes no son construibles.

   b. ¿Recuerdas como se construían, geométricamente, los números racionales? Pues bien, para ello usamos la división en partes iguales de un segmento, apoyados en el teorema de Thales. Recordemos un poco (observa con atención y ve siguiendo la construcción con tus materiales, en el espacio asignado).

c. Lo anterior lo deberás tener en cuenta para la construcción de los números irracionales. Ahora observa la ilustración y responde.



- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC?

- ¿Cuánto mide el segmento de color verde?

- ¿Qué método utilizo para hallar su medida?

- ¿Cuánto mide el segmento BF?

d. Observa el video, sigue la construcción en tu material y presta mucha atención a la observación general que se hace al final.

Si prestaste total atención pudiste darte cuenta que la construcción anterior correspondía al número irracional $\sqrt{2}$. Sin embargo también existe un método numérico para hacerlo, este es a partir del teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow h^2 = 1^2 + 1^2 \; h^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

Por lo que BF sería la medida geométrica de $\sqrt{2}$ y F la ubicación final.

2. Teniendo en cuenta lo anterior, la nota del ejercicio y tu material del estudiante realiza la siguiente actividad.

Construye con regla y compás los siguientes números irracionales. Para ello ten en cuenta la observación que se te hace al final, lo visto anteriormente y el ejemplo de tu material del estudiante.

$2\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad\quad$ $1+\sqrt{6}$ $\quad\quad$ *y* $\quad\quad$ $1-\sqrt{7}$

Observación: si quisiera construir $\sqrt{3}$, debería tener en cuenta de usar el teorema de Pitágoras pero de atrás para adelante…

$h = \sqrt{3} \rightarrow h^2 = ? + ? = 3$
$h^2 = 2 + 1 = 3$
$h^2 = a^2 + b^2 = 3$
es decir que $a^2 = 2$ *y* $b^2 = 1$
por lo tanto $a = \sqrt{2}$ *y* $b = 1$

Resumen

Aplicando lo aprendido
Haz estado atento a lo trabajado? Es hora de afianzarlo! En conjunto ve respondiendo a la lluvia de preguntas y al final construye tu propia conclusión.

a. ¿Que son los irracionales?

b. ¿Cómo surgieron los irracionales?

c. ¿Quién fue Pitágoras?

d. ¿Cómo surgió el $\sqrt{(2)}$, el número de oro y π ?

e. ¿En qué consiste la aproximación decimal?

f. ¿Por qué y cuáles irracionales se pueden construir?

g. ¿Cuál es tu conclusión acerca de los números irracionales?

Tarea

Después de haber realizado la actividad en conjunto con su debida conclusión, realiza lo siguiente:

a. Construye un mapa conceptual de los números Irracionales.

b. Construye el número áureo $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ con regla y compás.

c. Hallar experimentalmente el número , midiendo el perímetro de una circunferencia y dividiéndolo por el diámetro de la misma.

d. Investigar sobre otros números irracionales, cómo e, algunos logaritmos u otros.

e. Pensar: ¿Qué conjunto es más "grande" el conjunto de los Racionales o el conjunto de los Irracionales?