Grado 11

Matematicas - Unidad 1

Operando en el conjunto de los números reales.

Tema

Reconocimiento de la relación de orden en los números reales.

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

El definir el conjunto de los números reales fue uno de los problemas que trajo consigo la modernidad en las matemáticas. Fueron muchos los matemáticos que construyeron una definición de número real, de los cuales anteriormente se han mencionado a Dedekind, Weierstrass, Cantor y Cauchy, entre otros. La mayoría llega a definir o enunciar 10 axiomas. Unos llamados axiomas de cuerpo, que tienen que ver con la estructura algebraica de los reales, y los otros llamados axiomas de orden, los cuales atribuyen a los reales, junto con el axioma de completitud, la continuidad.

Actividad Introductoria: ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

Observa la siguiente animación:

Susy y Clara tienen una discusión respecto a la cantidad de números que hay entre 2 y 3. Susy considera que dicha cantidad es finita, ya que reconoce que al ubicar estos números en la recta numérica su distancia es muy pequeña, además que sus representaciones decimales permiten evidenciar que dicha distancia es un numero menor a 1. Por otro lado Clara considera que la cantidad de números es infinita y reta a Susy a determinar los números anterior y siguiente de 2 y 3, puesto que ella pude hallar rápidamente un número que este entre alguno de los que halle Susy y una de las raíces. Además argumenta que este proceso lo puede hacer indefinidamente.

Después de conocer la discusión entre Susy y Clara, junto con tu profesor y compañeros de clase, realiza un foro en dónde el tema central sea dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Quién crees que tiene la razón? ¿Por qué?

2. ¿Es posible encontrar siempre un real entre dos reales dados?

3. ¿Cómo determinar el número siguiente o anterior a 2 y 3?

Objetivos

- Reconocer la relación de orden establecida en el conjunto de los números reales.
- Identificar las propiedades del orden usual establecido en los números reales.
- Realizar ordenación de números reales a partir de las propiedades de orden.

Actividad 1: Ordenando números.

Resuelve:

1. Dados dos números reales, **a y b**, determina el orden entre estos y argumenta el por qué de tu respuesta:

a. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

b. π y $(1+\sqrt{5})/2$

c. 1,00324 y 1,0324

d. Sen 30° y ½

2. De acuerdo a lo anterior y en tus palabras, ¿cuáles son las relaciones de orden que se pueden establecer en los reales y qué condición cumplen?

Actividad 2: Propiedades de orden de los reales.

Resuelve:

1. Con base en las relaciones de orden establecidas en la anterior actividad, determina una forma matemática de probar dichas relaciones.

2. Determina el signo de las diferencias:

a. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

b. $\pi - (1+\sqrt{5})/2$

c. $1{,}00324 - 1{,}0324$

d. $\text{Sen } 30 - \frac{1}{2}$

3. ¿Qué se puede concluir respecto de la relación de orden establecida entre cada pareja de números y el signo de las diferencias?

Actividad 3: Otras propiedades de la relación de orden en los reales.

Resuelve:

1. Si se tiene que $a<b$, entonces ¿qué se puede concluir de la relación que existe entre $a+c$ y $b+c$?, ¿se cumple para todo c?

2. Si se cumple qué $a>0$ y $b>0$, entonces ¿qué se puede decir del producto de ab?

3. Si se cumple que $a>b$ y $b>c$, entonces ¿qué se puede concluir de a y c?

4. Si $a>b$, entonces qué relación de orden existe entre $a+c$ y $b+c$.

5. Si $a<b$, entonces qué relación de orden existe entre $a-c$ y $b-c$.

6. Si $a<b$, entonces qué relación de orden existe entre ac y bc.

Actividad 4: Ordenemos en la recta numérica.

Recordemos los métodos de Tales, Pitágoras:

Representación de números racionales en la recta numérica.

1. Haciendo uso del método geométrico que aplica el teorema de Tales.

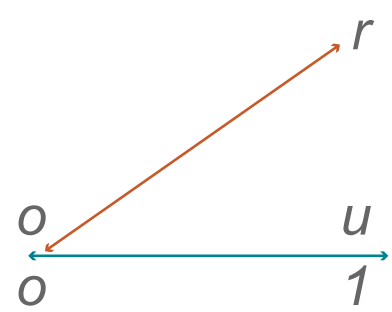
Realicemos como ejemplo el paso a paso de la construcción de los números racionales:

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{4}{5}$$

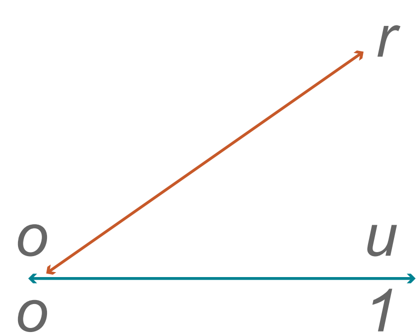
a. Para representar cualquier número irracional en la recta numérica es indispensable fijar el origen **O** (al que se asocia el número **0**) y la unidad **U** (a la que se le asocia el número **1**).

b. Una vez fijado el segmento **OU**, se divide en tantas partes iguales como indique el denominador; para tal fin se aplica el teorema de Tales así:

Se traza una recta **r** por **O**

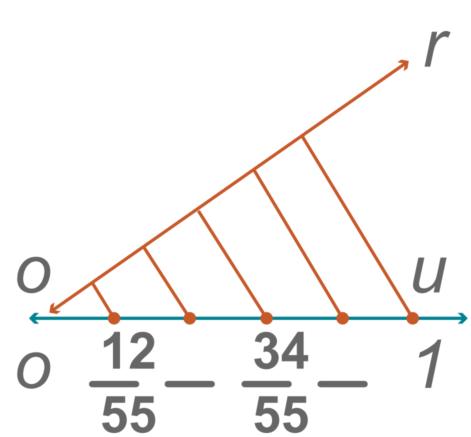


Se marcan cinco segmentos iguales sobre **r** a partir de **O**



Se une el quinto punto con U y se trazan segmentos paralelos a este.
Las intersecciones de tales segmentos con la recta OU corresponden respectivamente a la ubicación en la recta numérica de los números racionales:

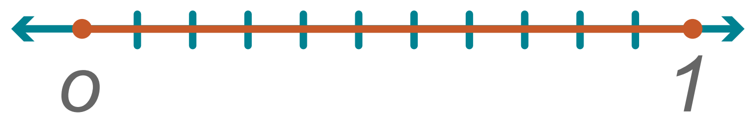
$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{4}{5}$$



2. Haciendo uso de encajonamientos.

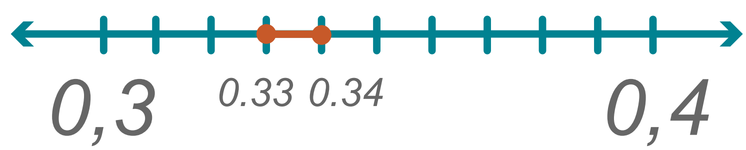
Realicemos la representación en la recta numérica de $\frac{1}{3}$ a partir de intervalos encajonados:

Se sabe que **1/3=0,3333**..., por tanto esta en el intervalo **[0,1]**

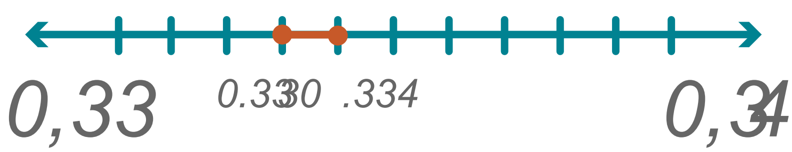


Por lo anterior **1/3** esta en el intervalo **[0.3,0.4]**

Tambien **1/3** esta en el intervalo **[0.33,0.34]**



Y **1/3** esta en el intervalo **[0.333,0.334]**



Se puede continuar este proceso indefinidamente.

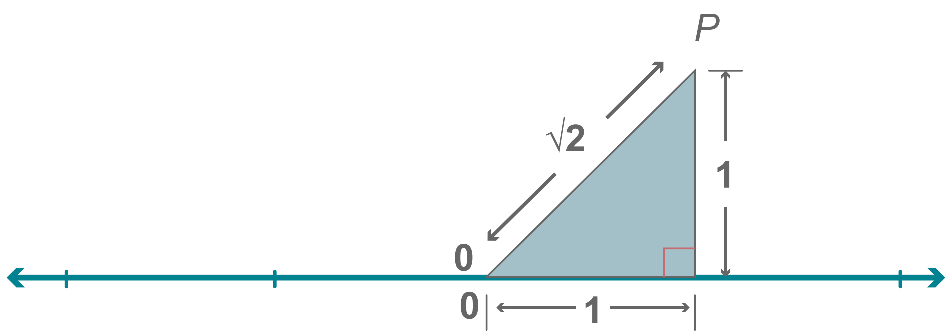
Representación de números irracionales en la recta numérica.

3. Haciendo uso del teorema de Pitágoras.

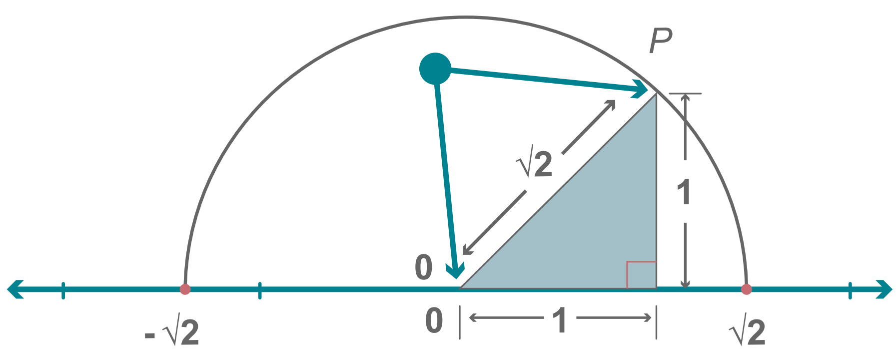
Construyamos el numero irracional $\sqrt{2}$.

Antes hay que recordar que la diagonal de un cuadrado de lado **1** es $\sqrt{2}$.

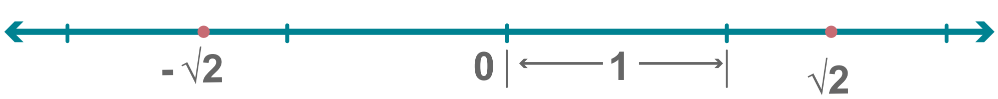
Primero se construye en la recta numérica un triangulo rectángulo cuya hipotenusa tenga medida $\sqrt{2}$.



Con centro en **0** y radio **2** trazamos un arco que corte la recta numérica.

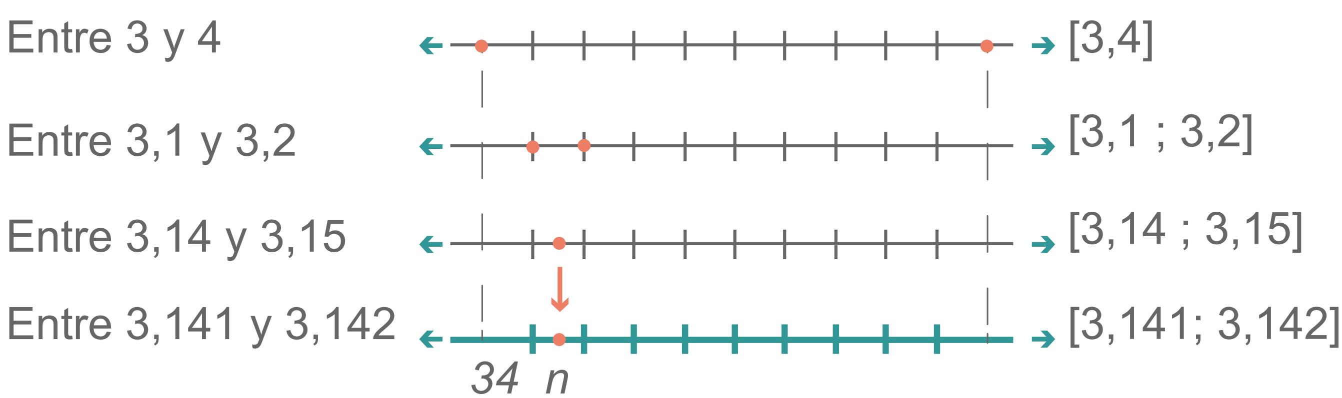


Por ultimo, se ubica **2** en el punto de intersección, a la derecha de **0**, entre el arco y la recta.



4. Haciendo uso de aproximaciones y encajonamientos.

Se muestra el ejemplo para representar por encajonamientos al número $\pi = 3.141592...$



De acuerdo a lo anterior, ubica en la recta numérica los siguientes números reales (se pueden utilizar varias de ser necesario).

- $-2\sqrt{3}$
- $\sqrt{2}$
- $\frac{3}{5}$
- -3.41
- $\sqrt{32}$
- $\frac{-8}{5}$
- $\sqrt{26}$
- $\frac{11}{18}$

- $\sqrt{5}$
- $3.01001...$
- $-\sqrt{8}$
- $\sqrt{21}$
- $5.42422...$
- $\sqrt{26}$

Actividad 5: Un conjunto muy denso.

Resuelve:

1. Con ayuda de una calculadora, hallar entre $\sqrt{5}$ y $\mathbf{\frac{(5\sqrt{8})}{6}}$ al menos tres números para cada una de las condiciones siguientes; si no es posible justificar por qué no lo es.

   a. Sean periódicos.
   b. Sean irracionales.
   c. Sean enteros.
   d. Sean racionales no periódicos.

Con base en el ejercicio anterior responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos números diferentes encontramos para cada condición a excepción del item c?

2. ¿Se podrían encontrar más números con tales condiciones? ¿Cuántos números más? Justificar

3. Si se toma un intervalo más "pequeño" (en términos de menor distancia) que el inicial, y se resolviera nuevamente el ejercicio, ¿podría encontrar todos los números que cumplen tales condiciones?

4. Si se toma ahora un intervalo mucho más "pequeño" (en términos de menor distancia) que el anterior y asi sucesivamente, ¿qué se podría conjeturar en general?

Resumen

Recordemos:

Las actividades realizadas permitieron evidenciar las propiedades de orden de los números reales y su uso para ordenar conjuntos de números reales, dichas propiedades son:

Tricotomía: Para dos números reales cualesquiera, a y b, se verifica una y sólo una de las relaciones: $a<b, a=b$ ó $a>b$.

Para verificar la propiedad de tricotomía se tiene que:

- En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada "menor que", de la siguiente manera: Sean $a,b \in R$ se dice que a es menor que b, simbolicamente $a<b$, si y sólo si $a-b$ es un número real negativo.

- En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada "mayor que", de la siguiente manera sean $a,b \in R$ se dice que a es mayor que b, simbolicamente $a>b$, si y sólo si $a-b$ es un número real positivo.

- En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada "igual que", de la siguiente manera sean $a,b \in R$ se dice que a es igual que b, simbolicamente $a=b$, si y solo si $a-b$ es igual a 0.

- Si $a>b$, entonces, para todo c, se cumple $a+c>b+c$

- Si $a<b$, entonces, para todo c, se cumple $a-c<b-c$

- Si $a<b$ y $\begin{cases} \text{si } c<0, \text{ entonces } ac<bc \\ \text{si } c>0, \text{ entonces } ac>bc \end{cases}$

Por ultimo, a partir de algunas construcciones y métodos que permiten determinar el lugar de un número en la recta numérica, se llego dar la idea intuitiva de densidad de los números reales, es decir que siempre van a existir infinitos números reales entre dos números reales.

Tarea

Con ayuda de la calculadora, ordena de forma ascendente los siguientes números reales:

- -9.9
- $\text{sen } 30°$
- $-\dfrac{1}{3}$
- $\pi^{\sqrt{2}}$
- $e^{-\frac{1}{2}}$
- $-\dfrac{21\sqrt{2}}{3}$
- $-\dfrac{4\pi}{3}$
- -0.33
- $\cos \dfrac{\pi}{4}$
- 0.397
- -0.2 e
- $\dfrac{1}{3}$
- $2^{-\frac{4}{3}}$