Grado 11

Matematicas - Unidad 1

Operando en el conjunto de los números reales

Tema

Identificación de inecuaciones lineales en los números reales

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

A través de la historia han surgido diversos problemas que han implicado el uso de ecuaciones e inecuaciones. Desde los babilonios y los chinos, varios siglos antes de Cristo, se empleaban métodos muy similares a los nuestros para solucionar diversas ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas.

Se han podido representar ciertas características, regularidades y comportamientos con ecuaciones e inecuaciones.

En el papiro de Rhind, el cual data del año 1600 A. C. Aprox., aparecen algunas técnicas básicas para solucionar ecuaciones simples de primer grado.

En los Elementos de Euclides se menciona, aunque no con este nombre, la desigualdad triangular y se define desigualdad entre razones, además se hace un estudio sobre la variación de las relaciones de igualdad y desigualdad entre razones.

Existe la desigualdad de Ptolomeo, la cual es una generalización del teorema de Ptolomeo, el cual relaciona los lados de un cuadrilátero con sus diagonales.

En pleno renacimiento se dan fuertes debates entre matemáticos de la talla de Ferrari, Cardano y Tartaglia sobre métodos para solucionar ecuaciones de tercer y cuarto grado.

Hoy en día es común escuchar (bueno, no mucho) de las desigualdades de Cauchy-Schwarz, la Desigualdad de las medias aritmética y geométrica, la desigualdad de Bernoulli o Desigualdad de Chebyshev.

Es difícil seguir el rastro y descubrir quien o quienes fueron los primeros en hablar de desigualdades y en introducir la notación que hoy en día utilizamos, pero, lo que es claro es que en la historia misma de las matemáticas, la cual es tan basta y extensa como la misma historia de la humanidad, aparece constantemente, e indiferente de época o lugar del mundo, los conceptos de igualdad y desigualdad, y ligados a estos los de ecuación e inecuación, los cuales son fundamentales para el desarrollo de múltiples áreas de las matemáticas mismas.

Actividad Introductoria

Consulta acerca de los hechos que se mencionan en el anterior escrito, determina el año en que sucedieron, el lugar y haz una breve reseña acerca de las personas mencionadas, además si hay mas personajes involucrados inclúyelos en tu consulta.

Objetivos de aprendizaje

» Resolver inecuaciones en el conjunto de los números reales.
» Utilizar las propiedades del orden de números reales para resolver inecuaciones.
» Utilizar intervalos, expresiones algebraicas y gráficas para representar las soluciones de una inecuación.
» Reconocer el valor absoluto de un número real e involucrarlo en la resolución de inecuaciones.

Actividad 1: Recordando ando

Ejercicio 1

1. ¿Recuerdas que es una inecuación?

2. Reconoce cual de las siguientes expresiones es una inecuación, justifica tu respuesta:

a. $a=b$
b. $6x+9\geq -2x+5$
c. $2>-3$
d. $x^2-6<0$
e. $x\leq \frac{1}{9}$
f. $x-y>12$
g. si $c, b \in R$, $c<-b$

Ejercicio 2

a. ¿Qué significa resolver una inecuación?

b. ¿Cómo es la solución de una inecuación?

Recuerda que:

Con la palabra desigualdad se expresa que una cantidad es mayor o menor a otra, por ejemplo:

*Si a es un número real positivo, decimos que "a es mayor que cero" y escribimos $a>0$.

*Si a es un número real negativo, decimos que "a es menor que cero" y escribimos $a<0$.

*Si a y b son números reales y existe un número real positivo c tal que $a-b=c$, decimos que "a es mayor que b" y escribimos $a>b$.

Los símbolos $a\leq b$ se usan para indicar que $a=b$ o que $a<b$, análogamente los símbolos $a\geq b$ se emplean para indicar que $a=b$ o que $a>b$.

Por tanto expresiones como $a\leq b$, $a<b$, $a\geq b$, $a>b$, se denominan desigualdades.

Actividad 2: Solucionando inecuaciones lineales

Las inecuaciones lineales son aquellas cuyo grado absoluto es 1.

Ejercicio 1

1. Observa y justifica cada uno de los pasos mostrados para solucionar la inecuación:

$$3x+11 \leq -14x+8$$

Solución:

$3x-3x+11-8 \leq -14x-3x+8-8$ ___________________________________

$3 \leq -17x$ ____

$\left(-\frac{1}{17}\right)3 \geq \left(-\frac{1}{17}\right)-17x$ ____________________________________

$-\frac{3}{7} \geq x$ ____

2. ¿De que otra manera se puede expresar la solución de la inecuación resuelta?

3. Representa la solución de la inecuación anterior de tres maneras distintas.

Ejercicio 2

1. Observa detenidamente la inecuación $-3 \leq 3x+7 \leq \frac{1}{2}$ y responde:

a. ¿Cuántas inecuaciones presenta el ejemplo?

b. ¿Qué deberá cumplir el conjunto solución de estas inecuaciones?

2. Observa y describe paso a paso el procedimiento para solucionar la inecuación anterior:

$$-3-7 \leq 3x+7-7 \leq \frac{1}{2}-7$$ ____

$$-10\left(\frac{1}{3}\right) \leq 3x\left(\frac{1}{3}\right) \leq -\frac{13}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$$ ____

$$-\frac{10}{3} \leq x \leq -\frac{13}{6}$$ ____

Luego el conjunto solución es:

$$\left\{x \mid -\frac{10}{3} \leq x \leq -\frac{13}{6}\right\} \text{ ó } \left[-\frac{10}{3}, -\frac{13}{6}\right]$$

3. Gráfica el anterior conjunto solución

- ¿Cómo estar seguro que el conjunto solución satisface la inecuación?

4. Describe en tus palabras el procedimiento para solucionar una inecuación.

5. Describe en tus palabras el procedimiento para solucionar una inecuación.

   a. $6\text{-}x \geq 2x+9$

b. $\frac{2}{5}x+1<-2x+\frac{1}{5}$

c. $1<3x+4\leq18$

d. $\frac{1}{6}\leq(\frac{3x-11}{12}<\frac{2}{3}$

Actividad 3: Solucionando Inecuaciones no lineales

Las inecuaciones no lineales son aquellas cuyo grado es diferente de 1.

Por ejemplo

$5x2+3x\geq3+2x^2$, $(x+2)(x-3)(x-1)\leq0$, $x^2+5x>-6$, $-2\leq\frac{x-1}{x+3}$

En esta parte nos vamos a centrar en dos tipos de inecuaciones (hay más tipos), las que involucran polinomios con grado absoluto mayor a 2 y las racionales.
Sus soluciones resultan similares a las ecuaciones de estos tipos, con algunas salvedades.

Para solucionarlas resulta necesario, como primer paso, despejar, de tal modo que uno de los lados de la inecuacion quede desigualado a cero, por ejemplo la inecuación $x^2+5x>-6$ quedaria $x^2+5x+6>0$.

Luego, la idea es factorizar, teniendo en cuenta el signo de un producto o cociente y obtener factores lineales, de ser posible.

Dado que $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, entonces se reemplaza el primer miembro de la desigualdad por su factorización:

$$(x+2)(x+3)>0$$

Dado que la solución de la ecuación $(x+2)(x+3)=0$ son los valores de $x=-2$ y $x=-3$; estos dos números reales dividen la recta numérica en los siguientes tres intervalos: $(-\infty,-3),(-3,-2)\ y\ (-2,\infty)$; vamos a determinar los signos de los factores usando valores de prueba para cada uno de estos tres intervalos, con el fin de encontrar cuando este producto es positivo de tal manera que se cumpla la inecuaciones $(x+2)(x+3)>0$.

Asi elegimos un número real dentro de cada uno de estos tres intervalos y lo evaluamos en los factores $(x+2)$ y $(x+3)$ para identificar el signo de estos en el valor seleccionado. Para nuestro ejemplo tomáremos: $x=-6$ en $(-\infty,-3), x=0\ en\ (-3,-2)\ y, x=6\ en\ (-2,\infty)$. Entonces la sustitución de tales valores en los factores da:

$x=-6$ en $(-\infty,-3)$

$(x+2)\rightarrow -6+2=-4<0$ (negativo)
$(x+3)\rightarrow -6+3=-3<0$ (negativo)

$x=-2.5$ en $(-3,-2)$

$(x+2)\rightarrow -2.5+2=-0.5<0$ (negativo)
$(x+3)\rightarrow -2.5+3=0.5>0$ (positivo)

$x=6$ en $(-2,\infty)$

$(x+2)\rightarrow 6+2=8>0$ (positivo)
$(x+3)\rightarrow 6+3=9>0$ (positivo)

Siempre resumiremos esto en una tabla (se le llama el cementerio), como se muestra a continuación:

Intervalo	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,\infty)$
Signo de $(x+2)$	-	-	+
Signo de $(x+3)$	-	+	+
Signo de $(x+2)(x+3)$	+	-	+

De acuerdo a la tabla anterior se puede evidenciar que $(x+2)(x+3)$ es positivo en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(-2,\infty)$, por tanto la solución de la inecuaciones $(x+2)(x+3)>0$ o $x^2+5x+6>0$ es el conjunto de todos los números reales x que pertenecen a $(-\infty,-3)$ o a $(-2,\infty)$, en otras palabras $\{ x|x\in(-\infty,-3) \vee x\in(-2,\infty)\}$. No se incluyen los extremos dado que la condición es que sea estrictamente mayor que cero tal producto.

Ejercicio 1: Soluciona las siguientes inecuaciones y expresa su solución gráficamente y con intervalos:

a. $x(2x+7)\geq0$

b. $3x^2-3x<2x^2+4\geq0$

c. $5x^2+3x\geq3+2x^2$

d. $(x+2)(x-3)(x-1)\leq 0$

e. $(x+2)(x-1)>0$

Inecuaciones que contienen cocientes:

Ejemplo: resolver la inecuaciones $\dfrac{2x+1}{x-5}\leq 3$

Solo podemos identificar el signo teniendo un miembro que solo contenga el cero, además el otro miembro sea un producto o cociente; por tanto:

Iniciamos pasando todos los términos no cero a un miembro de la inecuaciones y posteriormente buscamos un denominador común con el fin de poder simplificar o ver tales términos como un cociente. A continuación un paso a paso de lo mencionado:

$\dfrac{2x+1}{x-5}-3\leq 0$ recuerda que las inecuaciones funcionan de alguna manera como las ecuaciones (escribirlo bien para que lo diga el profesor)

$$\frac{2x+1-3(x-5)}{x-5}\leq 0$$

$$\frac{2x+1-3x+15}{x-5}\leq 0$$

$$\frac{-x+16}{x-5}\leq 0$$

Se debe identificar para que valores de x el denominador y denominador son cero, con el fin de hallar los números con los que se formaran los intervalos. Por tanto x-5=0 para x=5 y -x+16=0 para x=16. Con estos valores se realiza la tabla de signos para definir intervalos en la recta

Intervalo	(-∞,5)	(5,16)	(16,∞)
Signo de -x+16	+	+	-
Signo de x-5	-	+	+
Signo de $\frac{-x+16}{x-5}$	-	+	-

A partir de la tabla vemos que la solución de $\frac{-x+16}{x-5} \leq 0$ es {x|x ∈(-∞,5)∪[-16,∞)}. Se incluye el extremo 16 porque la inecuaciones requiere que el cociente sea menor o igual a 0; sin embargo no se incluye el extremo 5 dado que el cociente de la inecuaciones no está definido para este número. El conjunto solución (-∞,5)∪[-16,∞)

Ejercicio 2: Soluciona las siguientes inecuaciones y expresa su solución gráficamente y en intervalos.

a. $\frac{2x+6}{x-2} < 0$

b. $-2 \leq \frac{x-1}{x+3}$

c. $\dfrac{4}{x} < x$

d. $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{1}{x} \geq 1$

e. $\dfrac{7}{x-1} < \dfrac{6}{x-1} + 5$

Actividad 4: Inecuaciones con valor absoluto

El valor albsoluto de un número real *x*, denotado por $|x|$ está dado por:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Para resolver inecuaciones que contienen valor absoluto se aplican las siguientes propiedades, las cuales ayudan a deshacer o eliminar el valor absoluto y obtener inecuaciones en terminos conocidos:

Inecuaciones	Forma equivalente
$\|x\|<c$	$-c<x<c$
$\|x\|\leq c$	$-c<x<c$
$\|x\|>c$	$x<-c$ o $c<x$
$\|x\|\geq c$	$x\leq -c$ o $c\leq x$

Por ejemplo para resolver la inecuaciones $|5x-2|<6$ por la propiedad 1 es equivalente a $-6<5x-2<6$, luego el procedimiento de este tipo de inecuaciones ya lo conocemos.

Ejercicio 1: Termina de solucionar la inecuación que utilizamos como ejemplo para aplicar las propiedades del valor absoluto.

a. ¿Por qué las inecuaciones con valor absoluto se desarrollan de esta forma?

Otro ejemplo es $|x+1|\geq 1$, de acuerdo a la propiedad 4 la inecuación es equivalente a $x+1\leq -1$ o $1\leq x+1$, las cuales son inecuaciones lineales. Aplicando lo anteriormente visto se tiene que el conjunto solución es $\{x|\ x \leq -2 \vee 0 \leq x\}= x\in(-\infty, -2)] \cup [0,\infty)$.

Ejercicio 2: Verifica, realizando el procedimiento apropiado, que el conjunto solución dado en el anterior ejemplo es correcto.

Resuelve las inecuaciones, representa el conjunto solución en notación de intervalo y gráficamente. del valor absoluto.

a. $|x-3|<1$

b. $|2x+5|\leq 9$

c. $|3x-1|> -\frac{5}{6}$

Resumen

Es una desigualdad entre expresiones matemáticas que relacionan cantidades conocidas y cantidades desconocidas, estas últimas denominadas incógnitas.

La solución de una inecuación comprende todos los valores que toma la incógnita para satisfacer la inecuación, es decir, es un conjunto de soluciones que se pueden representar de tres formas: como conjunto, como intervalo y gráficamente en la recta numérica.

La estrategia para determinar el conjunto solución depende del tipo de inecuación, así por ejemplo se tienen inecuaciones lineales, inecuaciones no lineales e inecuaciones con valor absoluto. Las primeras se resuelven dejando a un lado todos los términos que no contienen la incógnita y al otro los que sí, para ello se emplean las propiedades de orden de los números reales. Por otro lado para las inecuaciones no lineales es importante dejar a un lado todos los términos de tal manera que el otro lado solo contenga el termino cero, ello con el fin de poder identificar su signo; asimismo factorizar de ser posible el miembro no cero y analizar el signo del producto o cociente de la inecuación. Finalmente para las inecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta en su desarrollo las propiedades del valor absoluto para poder establecer su conjunto solución.

Tarea

Resuelve las siguientes inecuaciones, expresa el conjunto solución en sus tres representaciones (como conjunto, como intervalo y gráficamente en la recta numérica).

a. $12x-4x \geq -2x+3$

b. $-\frac{1}{4}x-1<\frac{3}{4}x+3$

c. $-\frac{3}{7} \leq \frac{x-5}{28} < \frac{2}{14}$

d. $3x^2-3x < 2x^2+4$

e. $-5x^2-3x \geq -3-2x^2$

f. $(x+2)(x-1)>0$

g. $\frac{2x+6}{x-2} <-2$

h. $|5x-7| \leq \frac{3}{4}$