Grado 11

Matematicas - Unidad 2

Las funciones, una forma de interpretar relaciones entre números reales

Tema

Caracterización de las funciones de variable real

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

Los estudiantes, a través de las diferentes actividades propuestas, podrán reconocer la función como una asignación de un elemento de un conjunto a un elemento de otro conjunto mediante una regla determinada, además de identificar el domino, codominio y recorrido de estas. A sí mismo, representaran funciones finitas en diferentes diagramas y de diferentes formas, para finalmente observar regularidades del comportamiento de la función para aproximar su gráfica.

Actividad Introductoria: ¿funciona o no funciona?

1. **Forma grupos de cuatro estudiantes máximo y lee con atencion las siguientes paginas que son un fragmento del trabajo de maestria de (Porras, F. 2011), titulado "El concepto de función en la transición bachillerato universidad" y prepárate para dar solución a las consignas propuestas luego del texto.**

4.3. Época antigua (2000 a.c - 500 d.c).

Inicialmente en la antigua Babilonia (2000 a. c 600 a. c) el hombre asumía el mundo como elemento independiente de sus propias decisiones, se veía más bien él como sujeto al albedrío de ese mundo, es decir, se sentía frágil ante su entorno. Por esta razón busca cómo empalagar a los elementos que él, por considerar más inalcanzables, les atribuía más poder: los astros celestes. Así que los idolatra, les 62 ora, les ofrece sacrificios y ofrendas. Pero esto hace necesario estar pendiente de los resultados de estas acciones, la observación de esos astros se va convirtiendo casi en sistemática, arrojando como frutos registros escritos de los cuales sobreviven tablillas de arcilla con las cuales el hombre buscaba, inicialmente, evidencia de cambios en el comportamiento de los astros: es necesario buscar pues regularidades en los cambios registrados, esto lleva al estudio de problemas de variación continua: luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales, períodos de visibilidad de algunos planetas en relación con el ángulo con el sol y otros. En sus cálculos usaban tablas sexagesimales de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y de raíces cúbicas, también potencias sucesivas. No expresaban los resultados de sus análisis de forma general, sólo aparecen en sus tablas casos concretos a los que les buscaban generalidades sin llegar a formulaciones genéricas (Ruiz, 1998, 107), es decir, introducen el problema presente en la pregunta: P1: ¿qué regularidades existen en la relación entre cantidades de diferentes magnitudes variables? Autores como Pedersen (1974, 36) ven en estos trabajos: IF: Instinto de funcionalidad. Se expresa como una relación muy general que asocia elementos de dos conjuntos, fruto de su profundización en métodos cuantitativos al tratar de aritmetizar observaciones difícilmente medibles, mediante lo que ahora se llamaría extrapolaciones e interpolaciones en busca de regularidades tal como lo evidencian las numerosas tablas dejadas por las culturas babilónicas. Pero este mero instinto no llega a vislumbrar aun los cambios y su relación pues los trabajos de las culturas babilónicas versaban solamente sobre casos concretos, sin llegar a formulaciones aunque buscaran regularidades; los valores de las magnitudes son sólo vistos como puntuales, discretos, particulares, sin 63 llegar aun a las ideas de cambio y de cantidad variable concebidas más adelante por el pensamiento griego al producir la variación conceptual (V1), desde IF hacia una noción menos lejana a la de función: NCR: Noción de cambio y de relación. Noción ajena a las matemáticas, pero presente en el pensamiento griego como idea muy primitiva de función. Se expresa como una "noción de cambio y relación entre magnitudes variables" (Ruiz, 108). Para los griegos la concepción de variabilidad era exclusiva de las magnitudes físicas y externa a los objetos matemáticos considerados estáticos. La respuesta al problema P1 se manifiesta en la creación de las proporciones las cuales se constituyen, en este momento histórico, en el mejor medio para comparar magnitudes que, además, estaban completamente desprovistas de su carácter numérico. Esta separación entre números y magnitudes alimentada por la inconmensurabilidad que ratificaba a los números como enteros y discretos y a las magnitudes como continuas hizo construir una versión discreta de los fenómenos naturales oponiéndose por siglos al avance en la construcción del concepto de función.

4.4. Edad media (476 d.C – 1453 d.C)

Ya en el siglo XIII, la búsqueda no sólo de explicación de los fenómenos si no, además una explicación racional produce el problema P2 generado por la pregunta: P2: ¿por qué ocurren los fenómenos naturales sujetos al cambio y al movimiento? NCR da cuenta del cambio, pero no del porqué, empieza pues a tornarse insuficiente para dar respuesta a esta nueva pregunta planteada en el marco de una época signada por la racionalidad y la búsqueda de "lo real, lo permanente, lo 64 inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia sensible…" (Crombie, 1979, p.29. citado por Ruiz, 111). Esta pregunta surge, aproximadamente a comienzos del siglo XIII, en particular está referida a fenómenos que incluían movimiento; se buscaba un modelo que respondiese a todas las cuestiones, la matemática entonces se convierte en la ciencia racional modelo para estas explicaciones tendiendo a ocupar cada vez un lugar más importante en las ciencias de la naturaleza poniendo en duda la demarcación establecida por Aristóteles entre estas y las matemáticas, o sea la variación conceptual V2. Filósofos como Grosseteste y Bacon llegan a afirmar que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales, lo que desembocó, como fruto de un largo proceso de cerca de cuatro siglos, a que en el siglo XIV se otorgara gran atención a la formulación matemática nutrida de la cuantificación de los movimientos (Crombie, 1979) sustituyendo la pregunta P2 por la pregunta P3: P3: ¿cómo suceden los cambios en los fenómenos naturales? NCR es ahora aún más insuficiente, no da cuenta ni del porqué ni del como de los cambios que registra, de modo que no da respuesta a las necesidades, se ha producido el desequilibrio y urge encontrarlo: Heytesbury y Swineshead habían desarrollado en Inglaterra la teoría de la intensidad de formas y, con ella, una cinemática-aritmética mientras en Francia Oresme se orientaba hacia la geometría, de modo que, en ambos casos, el movimiento era estudiado matemáticamente por primera vez en términos de distancia y tiempo, contribuyendo al desarrollo de la variación conceptual V3: RF: relación funcional: se expresa como una relación cualitativa entre el fenómeno a explicar y las condiciones necesarias y suficientes para su producción. Es, básicamente, una relación cualitativa causa efecto en la que se muestra claramente cómo están relacionados los cambios en lo que ahora llamaríamos variable dependiente con los cambios en lo que ahora llamaríamos la variable independiente, es decir, la descripción de los fenómenos se hace desde el 65 "cómo" (lo que no alcanzaba NCR), pero es fruto más de especulaciones teóricas que de la experiencia con el mundo físico, debido tal vez a una escasa sistematicidad en las medidas que no se alcanzaría hasta el siglo XVII, por esta razón la citada idea de relación funcional (RF) se desarrolló sólo en principio y fue expresada por dos métodos principalmente: El Álgebra de palabras" de Bradwardino de Oxford en el que se empleaban letras del alfabeto para representar las cantidades variables y las operaciones se indicaban con palabras, y el método geométrico, de Oresme, que acudía a las gráficas para representar la forma en que las cosas varían; el objetivo de Oresme era representar "las intensidades" de una cualidad de una magnitud continua, que depende de otra análoga, pero como aún se conserva la noción de número como conjunto de unidades, Oresme debe acudir a utilizar segmentos (que si son continuos) para representar las magnitudes y sus cambios. Sus representaciones, como las del Álgebra de palabras, son más cualitativas que cuantitativas, existe en ese entonces un desfase entre las especulaciones teóricas y las herramientas matemáticas y de medición disponibles, aspectos que constituyen una necesidad latente durante siglos y que no permitía el avance de la descripción de los fenómenos físicos, nuevamente se tiene un desequilibrio entre la necesidad y lo disponible.

4.5. Periodo moderno (desde finales del siglo XVI).

El estudio del movimiento ha traído consigo nuevas preguntas, todas ellas referidas a las relaciones entre cantidades variables: P4: ¿cómo expresar de manera funcional la relación entre las causas y los efectos? 66 Galileo (1564-1642) tuvo gran empeño en buscar resultados y relaciones en la experiencia más que en la abstracción, la experiencia para él estaba favorecida por nuevos instrumentos de medida que introdujeron aspectos cuantitativos donde antes no existían. RF permitía expresar relaciones entre variables pero de una manera cualitativa, para Galileo esto no es suficiente, los nuevos instrumentos de medida le arrojan resultados que superan lo expresable con RF, el desequilibrio ha sido establecido. René de Cotret afirma que es en este contexto que, el desarrollo de la concepción de variable dependiente (gracias a los trabajos de Galileo), vital en el establecimiento de relaciones causa-efecto de manera cuantitativa, contribuyó enormemente a la evolución de la noción de función (R. de Cotret. 1988, 13, citado por Ruiz, 1998, 117). En particular se identifica en este momento histórico la variación conceptual V4, es decir, el paso de RF a una noción aún más cercana de función: RFC: Relación funcional expresada cuantitativamente: Noción que se expresa como una relación funcional causa-efecto expresada cuantitativamente. Dichas relaciones eran verificables mediante la observación y la medición, pero Galileo aun expresa sus leyes de manera homogénea, en forma de proporciones, conservando el carácter que durante muchos siglos estancó el concepto de función dándole lugar al concepto de ecuación y encubriendo aspectos de la variación continua. En este punto de la historia resulta interesante llamar la atención sobre un detalle trascendente para este estudio; el hombre sigue buscando respuesta a la pregunta sobre cómo expresar las relaciones entre cantidades variables (en este momento en particular las relaciones entre cantidades y el tiempo), entre las causas y los efectos, pero de esas búsquedas ha emergido un objeto matemático: función, el cual trae consigo preguntas que, sin hacer sombra a las ya mencionadas, se toman buena parte del trabajo de los hombres de ciencia del momento: 67 P5: ¿Qué entidades se pueden clasificar dentro de la categoría de funciones? ¿Cómo definir función? ¿Cómo es correcto expresarla? Hasta el siglo XVII la relación entre el álgebra y la geometría era de subordinación de la primera respecto de la segunda. Para la geometría sólo existían aquellas curvas que pudieran trazarse con regla y compás. Esta situación restringía al álgebra en su campo de aplicación y a la geometría en el espectro de curvas conocidas, puesto que algunas construcciones geométricas eran casi imposibles. Las dos empiezan a tornarse insuficientes frente a las necesidades que la humanidad le planteaba a la ciencia que consideraba modelo de racionalidad. La diferencia ideales explicativos - capacidades corrientes se ha producido; primero Vieta (1540-1603) y luego René Descartes (1596 - 1650), buscan resolver problemas de construcciones geométricas mediante el álgebra dándole sentido a esta desde la geometría (Pierre Fermat (1601-1655) por su parte, hace lo mismo apoyado en los trabajos de Vieta (Kline 1992, 402-403. Citado por Delgado, 1998, 178)), Vieta ve posible expresar la igualdad y la proporción entre magnitudes mediante el álgebra (Kline, 1972, citado por Sastre, Rey, Boubée, 2008, 145) y Descartes (y Fermat) establece que una curva se puede construir con sólo su expresión algebraica superando el criterio –griego– que exigía la constructibilidad de la línea para aceptar la existencia de una curva (Delgado, 1998, 180), ampliando el espectro de curvas conocidas distinguiendo, incluso, entre curvas geométricas y curvas mecánicas. De esta manera, afirma Youschkevitch (1976, 25) es a Descartes a quien se le debe la idea de presentar una función en forma analítica al determinar que una ecuación en X y Y muestra la dependencia entre dos cantidades variables; RFC ahora se queda corta, ya no es suficiente establecer una relación funcional aunque sea cuantitativamente, la combinación álgebra-geometría (lo que podría llamarse algebreización de la curvas) posibilita predicciones operacionales para las relaciones funcionales, es necesaria la variación conceptual V5. Apoyado en Descartes, Gregory (1638 - 1675) realizará la distinción entre funciones "algebraicas" y "trascendentes" y, en 1667, da una definición más explícita de función: 68 COD: Cantidad obtenida de otras: una función es una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable. Según Youschkevitch (26) este paso de expresar funciones en términos de ecuaciones tuvo un poderoso efecto en el desarrollo de las matemáticas pues le otorgó el verdadero estatus de cálculo al estudio de las funciones. Similarmente, Sierpinska (1989a) le otorga un gran valor al desarrollo de la notación algebraica en la superación del obstáculo epistemológico de la diferenciación entre número y magnitud. Sin embargo es importante mencionar que este logro también produjo lo que Ruiz (121) llamó encantamiento con el álgebra que, a la larga, se constituyó en obstáculo epistemológico para el concepto de función: considerar como funciones sólo aquellas que pudieran expresarse algebraicamente.

a. Lee en voz alta el texto propuesto.

b. A partir del contenido del texto, elabora un mapa conceptual en el que estructures uno de los aspectos abordados: Definición de función, conceptos asociados o representación de funciones.

c. Establece una dinámica con la cual presentes el trabajo realizado a tus compañeros.

d. Escribe en este espacio los objetivos y aprendizajes que esperas obtener en esta clase según lo trabajado en la actividad introductoria.

Objetivos

- Describir características de las funciones de variable real.
  - » Reconocer la noción de función sobre conjuntos finitos e infinitos de parejas ordenadas.
  - » Identificar funciones finitas e infinitas.

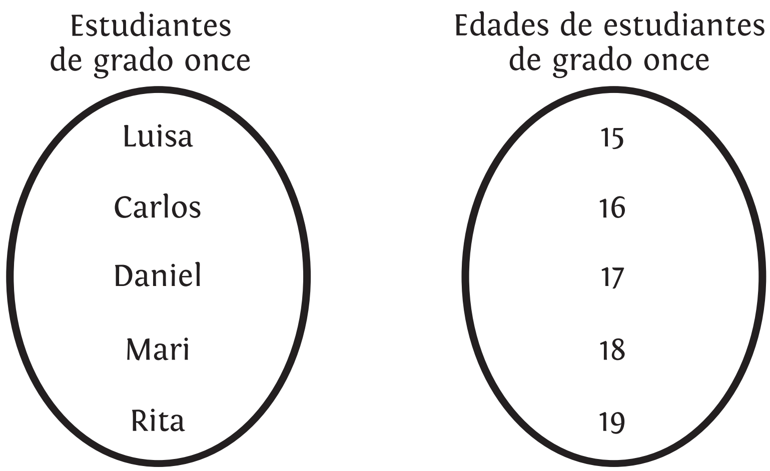
Actividad 1: Reconociendo e interpretando.

1. Lee con atención la siguiente situación problémica y da solución a las consignas propuestas.

Situación problémica

A un grupo de estudiantes de grado once, se les aplica una encuesta sobre la edad de cada uno de los integrantes de este. Los resultados, permiten establecer la siguiente conclusión: la edad mínima es de 15 años, la edad máxima es de 19 años y la edad promedio de los estudiantes es de 16 años.

a. Observa la siguiente gráfica:



b. Relaciona cada estudiante con su respectiva edad, de la manera en que mejor te parezca y responde.

- ¿Varios estudiantes pueden tener la misma edad?

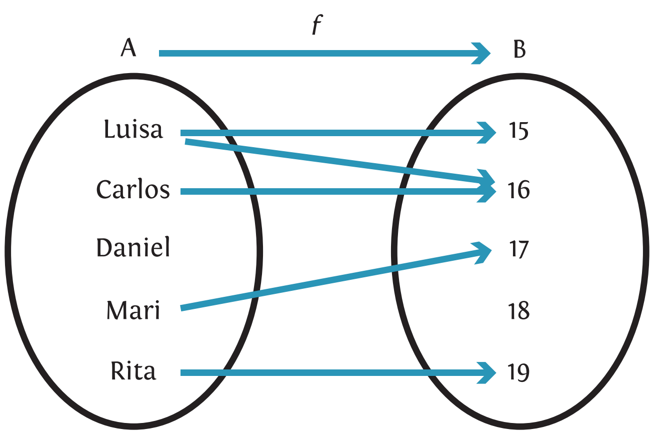
- ¿Un estudiante puede tener varias edades?

c. ¿El número de elemento del codominio es igual al número de elementos del rango?

d. Según el ejemplo que estamos analizando, ¿Cómo se puede representar la función?

d. ¿Qué observas en la siguiente relación entre conjuntos?

f = {(luisa, 16), (Carlos, 16), (luisa, 15), (Mari, 17), (Rita, 19)} es decir:



2. Observa con atención la explicación dada por tu docente en este momento a través del recurso digital.

Ahora debes determinar todas las funciones posibles entre dos conjuntos dados y determinar, entre una serie de relaciones, las que sean funciones, justificando tus respuestas.

a. A = {1, 2} B = { a, b, c} (9 funciones posibles)

b. A = {1, 2} B = { a, b, c} (1 función posible)

3. De nuevo observa con atención la explicación que dará tu docente a través del recurso digital y da solución a las siguientes consignas propuestas.

a. Establece una función.

b. Representa esta en los diferentes registros existentes (aquí es importante que se retome la información presente en el texto de la introducción).

c. Indica de forma verbal y gráfica, ¿cómo se determina en cada representación que la relación planteada es una función?

Actividad 2: Finito e infinito.

Para el desarrollo de esta actividad; soluciona las siguientes consignas y prepárate para que socialices tus respuestas o analices las de tus compañeros. Trabajo individual.

1. Funciones finitas.

a. Considera el conjunto formado por algunos departamentos de Colombia.

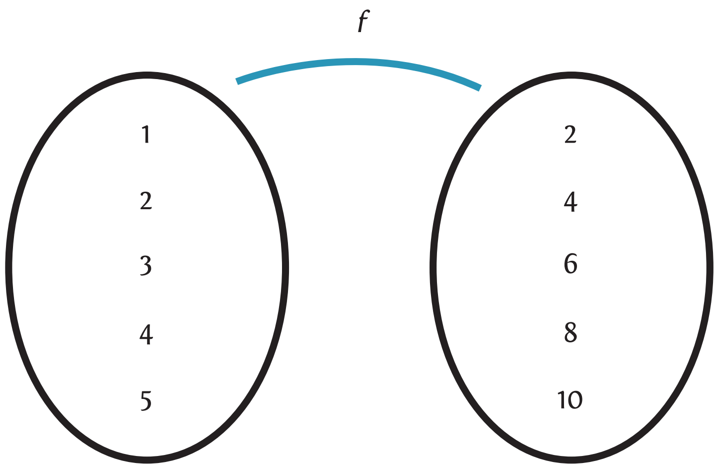
A= {Valle del Cauca, Nariño, Amazonas, Putumayo}.

b. Suponga que A es el dominio de una función.

c. Halle el rango de la función, donde la relación que define la función sea la capital de cada departamento.

d. Representa el dominio y rango de la función utilizando diagrama sagital y de Venn.

d. Observa con atención y prepárate para dar solución a las siguientes consignas.



e. ¿Qué relación, se puede establecer entre los elementos de los conjuntos de la ilustración 1?

f. Expresa por extensión el dominio y rango de la función.

g. ¿Cómo representarías, la función anterior, por comprensión?

h. Completa la siguiente tabla, donde la primera fila corresponde a los elementos del dominio y la segunda a los elementos del rango.

x					
***f*(x)**					

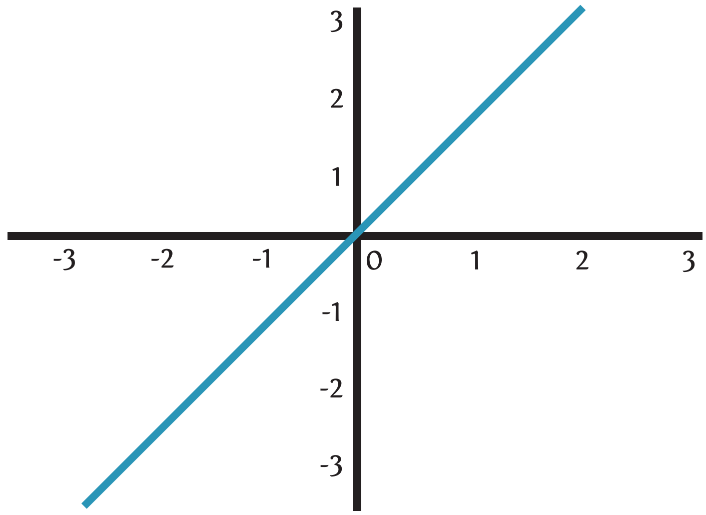
i. Realiza la gráfica en el plano cartesiano, a partir de la tabla realizada.

j. Define una función finita y a partir de esta, realiza sus diferentes representaciones (Por extensión, diagrama sagital y de Venn, por comprensión, tabular y en el plano cartesiano).

2. Funciones infinitas.

Situación problema:

Observa con atención la siguiente grafica de una función; aclaramos que tanto el dominio como el rango de la función graficada es el conjunto de los reales R.



a. Realiza la representación algebraica de la función de la ilustración 2.

b. Realiza la representación tabular de la función de la ilustración 2.

Analiza la siguiente tabla y contesta las consignas propuestas para esta.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**n**	**...**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**			

c. ¿Existe una relación entre los elementos de la primera fila y los de la segunda?

d. Si existe una función representada en la tabla ¿Cuál es el dominio y el rango de esta? Justifica tu respuesta.

e. Grafica la función para algunos elementos del dominio {1, 2, 3, 4, 5} en el plano cartesiano.

A continuación el docente presentara a través del recurso una serie de funciones escogidas por él, según las fortalezas y debilidades observadas hasta este punto que deban ser trabajadas.

f. Determina cuáles funciones son finitas y cuáles infinitas, justificando tu elección.

g. Cambia de registro de representación las funciones dadas.

h. Determina las regularidades existentes en el comportamiento de las funciones dadas en otros registros, para aproximar su gráfica.

Resumen

Estableciendo conclusiones.

Desarrolla la siguiente actividad y prepárate para socializar con tus compañeros las conclusiones extraídas de esta. Formar grupos de máximo 4 estudiantes y soluciona las siguientes consignas propuestas.

a. Establece dos funciones, una finita y otra infinita.

b. Establece dos expresiones que parezcan funciones, pero que No lo sean.

c. Realiza la representación, en los diferentes registros, de las dos funciones y de las dos expresiones que parecen ser funciones. (Aunque no sean función, las dos últimas expresiones, realiza una simulación, la cual también esta errónea, pero que parezca correcta.)

d. En una hoja de block, consigna las cuatro expresiones y sus diferentes representaciones, presentándolas en el orden que desees.

e. Intercambia la hoja de block con los integrantes de otro grupo.

f. Al tener el trabajo realizado por tus compañeros, debes:

- Identificar las dos funciones y las dos expresiones erróneas.
- En las dos funciones, evaluar si las diferentes representaciones se han hecho correctamente.
- En las dos funciones, determina el dominio, el codominio y rango.
- Determina cuál función es finita y cuál infinita.
- Explicar por qué las dos expresiones seleccionadas no corresponden a una función.

Ayuda a tu docente a diligenciar los indicadores de cobertura levantando la mano al momento que el pregunte por el concepto indagado y tu respuesta haya sido satisfactoria.

A continuación avaluaremos el nivel de apropiación de los siguientes conceptos.

- Reconoces que es una función.
- Identificas el dominio, codominio y rango de una función.
- Identificas si la función es finita o infinita.
- Representas adecuadamente las funciones en los diferentes registros.
- Argumentas satisfactoriamente tus elecciones apoyándose adecuadamente de la teoría.

Tarea

1. **Basados en el trabajo realizado durante estas clases desarrolla la siguiente actividad aplicando los conceptos aprendidos y mejora tus competencias en el análisis y razonamiento sobre las funciones de variable real y sus características; da solución a las siguientes consignas:**

Realiza las siguientes consultas:

a. Consulta ampliamente, la historia del desarrollo del concepto de función y realiza una línea de tiempo en la que detalles el nombre de los personajes más representativos y sus aportes.

b. Consulta ¿Cómo se clasifican las funciones, a partir de sus características? Y elabora un esquema en el que consignes esta clasificación y brindes una muy breve caracterización de cada una de estas.

Toma apuntes, realiza mapas mentales o conceptuales sobre las consultas aquí propuestas.