Grado 11

Matematicas - Unidad 2

Las funciones, una forma de interpretar relaciones entre números reales

Tema

Caracterización de funciones polinómicas y racionales

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

Las aplicaciones definidas entre conjuntos numéricos que responden a una forma polinómica se denominan funciones polinómicas.

Las funciones polinómicas son de gran utilidad en diversas situaciones de la vida diaria. Se usan en ingeniería aeronáutica, por ejemplo, para saber el ángulo y la longitud a la que despega un avión o en hidráulica para calcular los tiempos de llenado o vaciado de tanques, entre otras.

Actividad Introductoria: Partido de fútbol.

1. La animación muestra a Olga, Chucho y Willington en un sillón viendo un partido de fútbol. Se ve como un jugador de fútbol mete un gol de tiro libre superando una barrera de cinco hombres.

Analiza la situación y con la asesoría del docente y responde:

a. ¿Cómo se puede modelar la posición del balón en cada instante?

b. ¿Qué función describe la trayectoria del balón?

Objetivos

» Caracterizar funciones polinómicas y racionales.

» Identificar funciones polinómicas.

» Identificar funciones polinómicas racionales.

Actividad 1: Análisis de un tiro libre.

1. Resuelve las siguientes preguntas:

a. ¿La trayectoria descrita por el balón que pasa por encima de una barrera en un tiro libre se puede ver en otras jugadas del partido? Da algunos ejemplos.

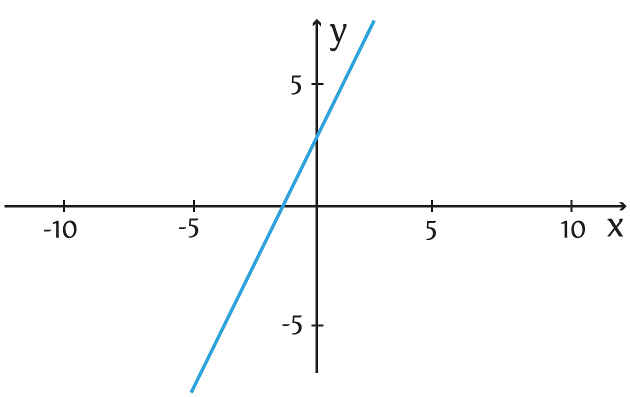
b. ¿Cuál cree que es la mejor trayectoria que debe recorrer un balón para poder hacer un gol desde la mitad de campo?

c. ¿Se puede describir el tipo de trayectoria en un despeje de balón?

d. ¿Se puede ver este tipo de trayectorias en otros deportes?

2. A continuación se muestra la representación gráfica de algunas gráficas polinómicas. Haz un análisis y determina:

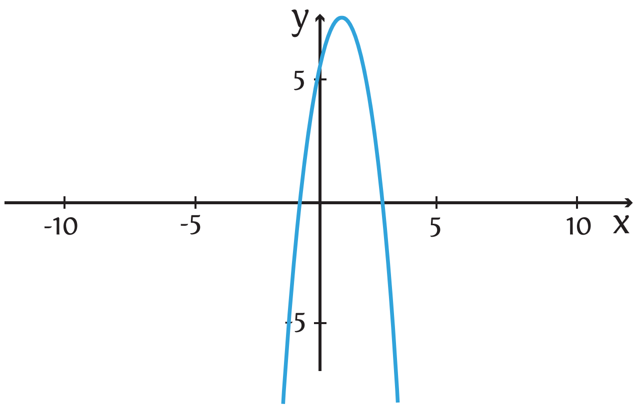
a. Máximos y mínimos.
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

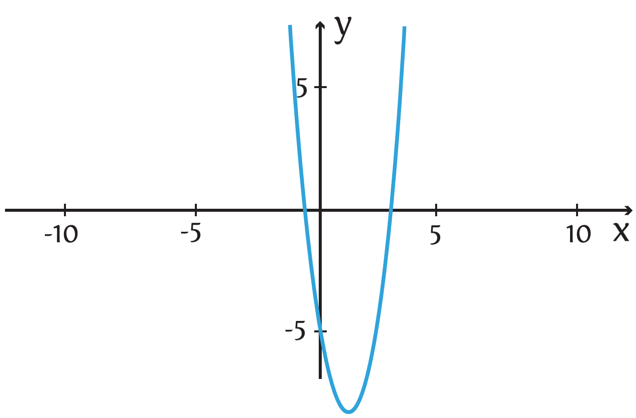
Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

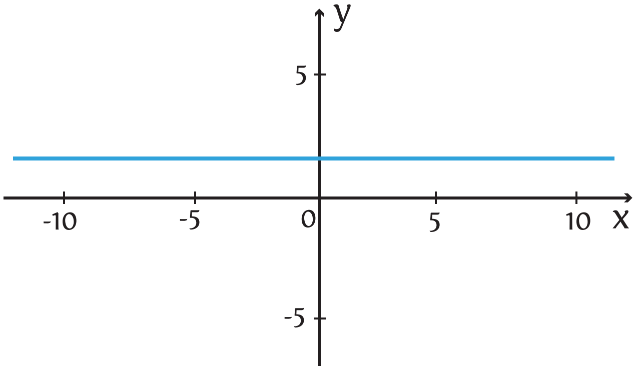
Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

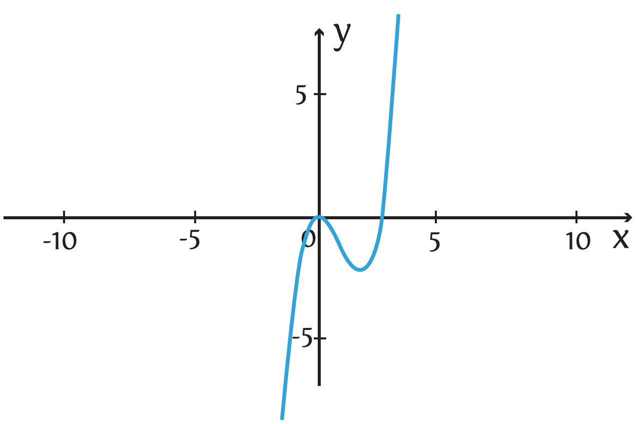
Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

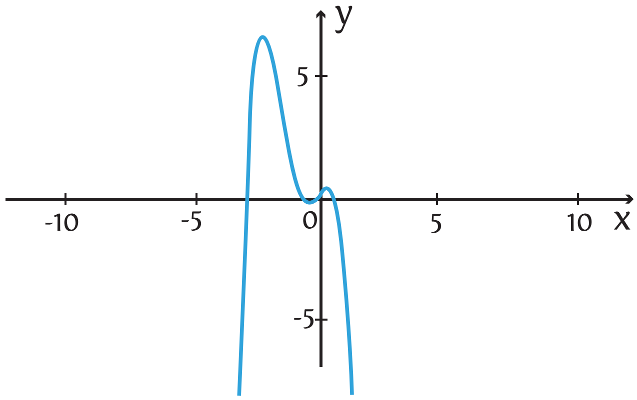
Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Dominio y recorrido.



Máximos y mínimos

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Dominio y recorrido.

3. Analiza las siguientes definiciones:

a. Un función de una sola variable se dice polinómica si es de la forma:

$$f(x)=a_0+ a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + x^n$$

$$\text{Donde } a_i \in R \quad y\ n \in Z$$

El dominio de un función polinómica son todos los números reales y el recorrido depende del n que se maneje, por ejemplo, si n es un número impar el recorrido son todos los números reales.

En el caso de lanzamientos de tiros libres, el polinomio que describe su trayectoria es de la forma $f(x)=a_0+a_1x + a_2x^2$ donde $n=2$ y $a_2 < 0$

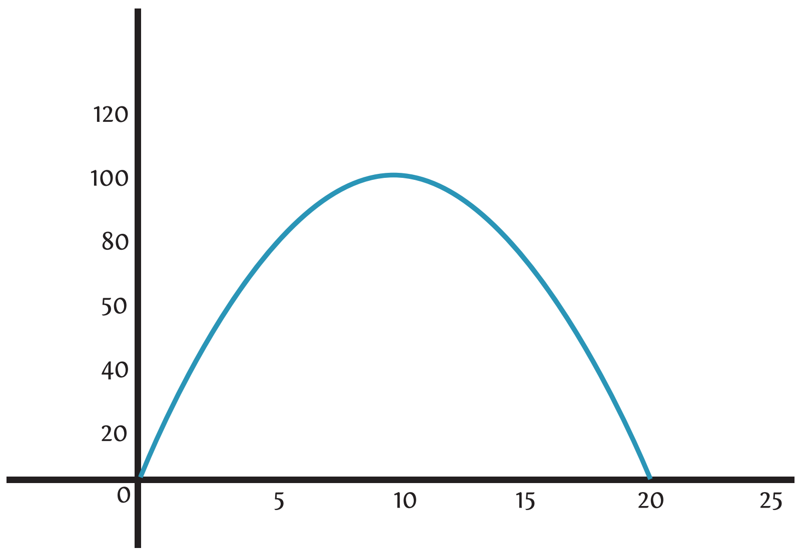
b. El grado de un polinomio *grad*(*f*) es igual al mayor exponente *n* que se encuentra en la variable, por ejemplo, en las funciones:

$f(x)= a_0+a_1x + a_2x^2$ Se dice que es de grado dos.

$f(x)= a_0+a_1x$ Se dice que es de grado uno.

$f(x)= a_0$ Se dice que es de grado cero.

c. Los ceros de un polinomio, o de una función, son los valores que puede tomar la variable de tal manera que la función se hace cero, es decir, $f(x)=0$, en el ejemplo del tiro libre $f(x)$ es cero en el inicio de la trayectoria y cuando el balón vuelve a tocar el suelo. El número de ceros de una función es igual al grado de la misma.



Actividad 2: Funciones polinómicas.

1. **Tabula y grafica las siguientes funciones polinómicas e indica el grado, los ceros, máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, dominio y recorrido de cada una.**

   a. $f(x) = -\frac{1}{2}$

Grado	**Gráfica**
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

b. $f(x) = -1/2$

Grado	**Gráfica**
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

c. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

Grado	Gráfica
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

d. $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

Grado	Gráfica
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

e. $f(x) = x^2 - 10$

Grado	Gráfica
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

f. $f(x) = 10 - x^2$

Grado	Gráfica
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

g. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$

Grado	**Gráfica**
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

h. $f(x) = 2x^3 + 6$

Grado	Gráfica
Ceros	
Máximos	
Mínimos	
Intervalos de crecimiento	
Intervalos de decrecimiento	
Dominio	
Recorrido	

2. **Responde las siguientes preguntas:**

a. ¿Qué tipo de polinomio modela la trayectoria de un tiro libre?

b. ¿Qué tipo de función modela la trayectoria de un pase corto?

Actividad 3: Mirar con lupa – Funciones polinómicas racionales.

1. **En una segunda animación se muestra una lupa y como se puede aumentar el tamaño de la imagen dependiendo de la distancia a la que se encuentra dicha lente, explicando que esta relación se puede encontrar usando un tipo muy especial de polinomios llamados racionales.**

   Utiliza una lupa y enfoca una imagen o una palabra, luego responde con asesoría de tu docente:

a. Al acercar una lupa a una imagen ¿Qué pasa con la imagen?

b. ¿Qué pasa con la imagen al alejarla?

c. ¿Qué pasa si se acerca mucho la lupa a la imagen?

d. ¿Qué pasa con la imagen si la lupa de aleja mucho?

e. ¿En algún punto del espacio no hay imagen?

f. ¿En algún punto del espacio la imagen es muy grande?

g. ¿En algún punto del espacio la imagen se invierte?

2. Analiza las siguiente definicion:

a. Un función se dice polinomio racional si es un polinomio dividido entre polinomio, es decir, si es de la forma:

$$f(x)=\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

Teniendo en cuenta que $p_2(x) \neq 0$.

La función $f(x)=\dfrac{4}{4-x}$ modela el tamaño de la imagen vista con una lupa dependiendo de la distancia de la lupa.

La restricción $p_2(x)\neq 0$ nos indica que el dominio de un polinomio racional son todos los números reales exceptuando aquellos valores donde el polinomio del denominador se hace cero, es decir, se deben suprimir los ceros del polinomio $p_2(x)$.

3. Tabula, grafica y encuentra los intervalos de crecimiento de la función $f(x)=\dfrac{4}{4-x}$.

Luego, responde la siguiente pregunta: ¿Qué sucede con la imagen cuando se pasa de una distancia de 4?

Actividad 4: Dividiendo polinomios.

1.Recordemos el algoritmo de la división dividiendo 345 entre 7.

$$\begin{array}{l|l} 34'5 & 7 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Se debe buscar un número que multiplicado por 7 de 34 o próximo a 34.

$$\begin{array}{l|l} 34'5 & 7 \\ \cline{2-2} -28 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Se hace la resta dentro del cuadro.

$$\begin{array}{l|l} 34'5 & 7 \\ \cline{2-2} -28 & 4 \\ \hline \ \ 6 & \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra, 5, y se continúa con el proceso.

$$\begin{array}{l|l} 34'5 & 7 \\ \cline{2-2} -28 & 49 \\ \hline \ \ 65 & \\ \ \ -63 & \\ \cline{1-1} \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Un número que multiplicado por 7 dé 65 o próximo a 65.

Finalmente tenemos que $345 \div 7 = 49 + \dfrac{2}{7}$ que se conoce como número mixto $\left(49\dfrac{2}{7}\right)$.

2. Utilizando el algoritmo de la división realiza la siguiente división de polinomios (no olvides ordenarlos del término de mayor a menor grado y si hace falta el término de cierto grado completar con 0).

b. Dividir $6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1$ entre $2x^2 + x - 3$

c. Dividir $4x^3 - 2x^2 + 6$ entre $2x + 3$

Actividad 5: Instructivo de excel para graficar funciones polinómicas.

1. **Con base en el instructivo para graficar funciones polinómicas en Excel, escribir el proceso usado para obtener la gráfica de las funciones dadas a continuación y dibuja la gráfica obtenida.**

a. $f(x)= x^4 - 3x^2 + x^3 - 6$

Procedimiento	**Gráfica**

b. $f(x)= 2x^3 - x^2 + 8$

Procedimiento	**Gráfica**

Resumen

1. Completa el texto "¿Cómo son las funciones racionales?", con base en las palabras o frases presentadas en la parte inferior.

Las funciones ________________ son funciones obtenidas al dividir un ________________ por otro polinomio distinto de ____________ . Para una única variable x una función racional se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios y *x* es una ________________ indeterminada siendo Q un polinomio diferente de cero. El ________________ lo forman todos los números excepto los valores de x que anulan el ________________ .

Reales	**Cero**	**Dominio**	
Denominador	**Variable**	**Polinomio**	**Racionales**

2. Dadas las siguientes afirmaciones indica si son verdaderas (v) o falsas (f) usando definiciones o argumentos válidos o refute usando algún ejemplo.

☐ a. Existen funciones racionales donde el dominio son todos los reales.

☐ b. El recorrido de los polinomios son todos los números reales.

c. Una función racional es las división de dos polinomios cualquiera. .

d. La función racional $\frac{P_1(x)}{Q_2(x)}$ tiene dominio todos los reales excepto los ceros del polinomio $p_1(x)$.

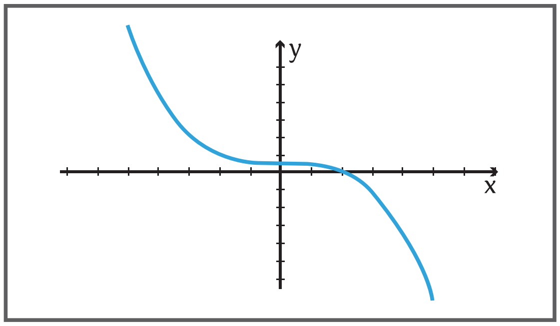
e. El grado de un polinomio depende de los ceros del mismo.

f. El número de ceros de un polinomio depende del grado del mismo.

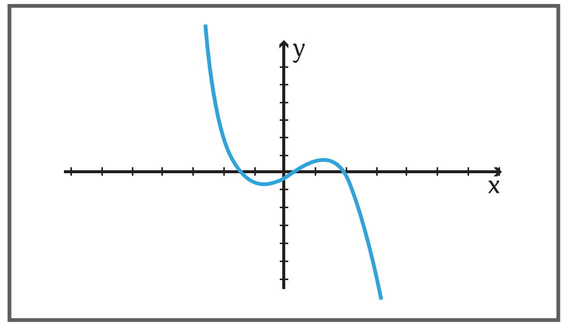
Tarea

1. Dadas las siguientes graficas identificar el grado del polinomio.

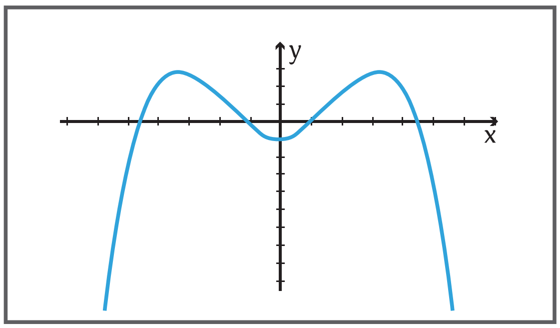
a.



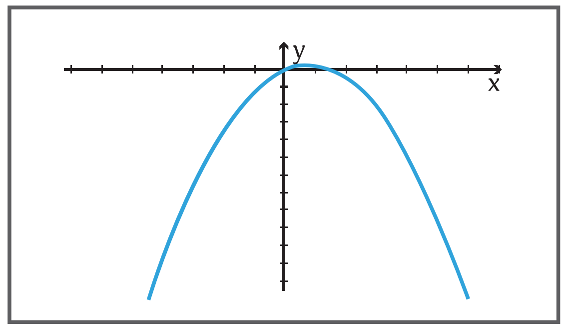
b.



c.



d.



2. Hallar el dominio de las siguientes funciones, identifique el tipo de función, racional o no, el grado de cada polinomio, los ceros de la función y use tabulación en un intervalos de menos 20 a 20 usando espacios de 0,5.

a. $f(x)= x^2 - 3x + 1$

b. $f(x)= 2x + \dfrac{3}{x - 1}$

c. $f(x)= \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 + x}$

d. $f(x)= \dfrac{x + 1}{x - 5}$

e. $f(x)= \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

b. A partir de dichas palabras, elabora un crucigrama. Recuerda que para descubrir una palabra en un crucigrama, se debe dar una clave o pista, sin hacer explicita la palabra.

c. Organiza el crucigrama elaborado (sin resolver), en una hoja de block, con sus respectivas claves o pistas. Márcalo con tu nombre en la parte inferior de la hoja.

d. Escribe aquí las pistas necesarias para solucionar el crucigrama que has propuesto.