Grado 11

Matematicas - Unidad 4

Las funciones, una forma de interpretar relaciones entre números reales.

Tema

Deducción de características de las funciones a través de su representación gráfica.

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

Al aplicar ciertas transformaciones a una gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas y, de este modo, reducir el trabajo al trazar esas gráficas.

La graficación de las funciones es como un retrato de la función. Nos ayuda a tener una idea de cómo transforma la función los valores que le vamos dando. A partir de la gráfica de la función podemos encontrar el dominio, el codominio, describir su comportamiento: dónde crece, dónde decrece, dónde se hace cero, dónde tiene un mínimo o un máximo, etc.

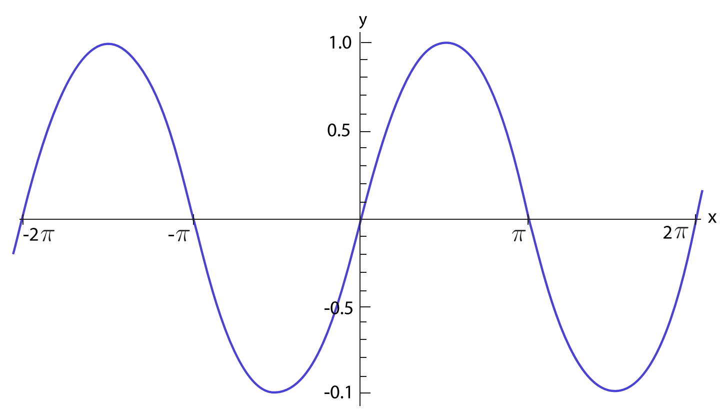
Actividad Introductoria: Olimpiadas matemáticas.

Obseva la animación:

La animación presenta a Susy y Nacho participando en las olimpiadas de matemáticas, mediadas por Buksy.
Se observa como Nacho se demora demasiado realizando la tabulación de las funciones para graficarlas mientras Susy analiza la gráfica original y va comparando para dibujar las siguientes gráficas muy rápido ganándole a Nacho.

Buksy entrega como pista la función original y=Sen(x) con su gráfica correspondiente y solicita realizar la gráfica de las siguientes funciones:

y=Sen(x)



y= Sen(x) + 3	y= 4Sen(x)
y= Sen(-x)	y=-Sen(x)
y=Sen (x-2)	y= Sen(4x)
y= 0.5sen(x)	

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tienen en común las funciones entre sí?

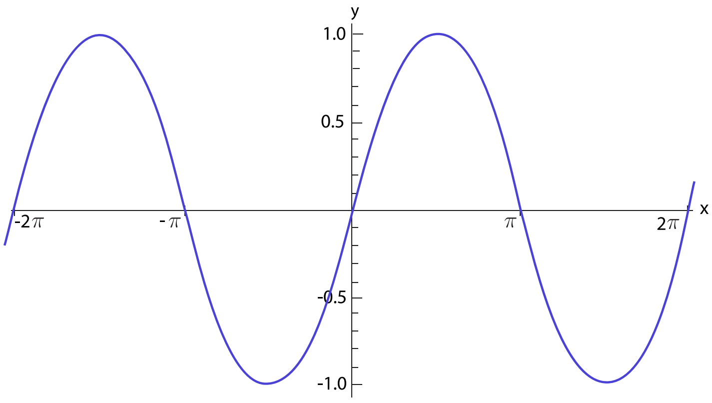
2. ¿En qué se diferencia cada función respecto a la función original?

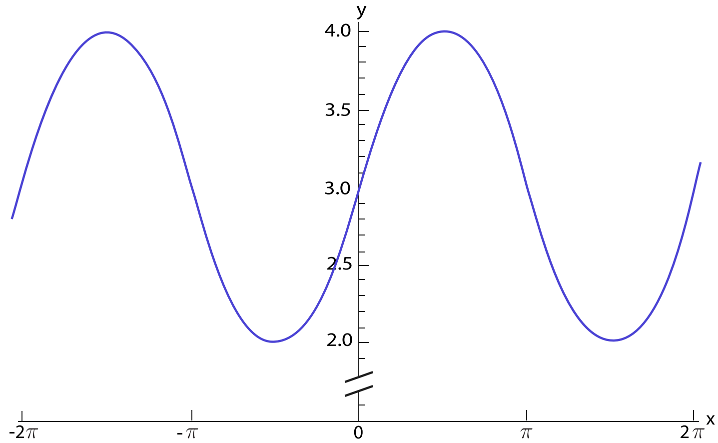
Objetivos

- Determinar características de funciones a través de cambios en su representación gráfica.
- Caracterizar las funciones a través de desplazamientos verticales en su representación gráfica.
- Caracterizar las funciones a través de desplazamientos horizontales en su representación gráfica.
- Caracterizar las funciones a través de reflexiones en su representación gráfica.
- Caracterizar las funciones a través de expansiones en su representación gráfica.
- Caracterizar las funciones a través de compresiones en su representación gráfica.

Actividad 1: Análisis de transformaciones en las olimpiadas de matemáticas.

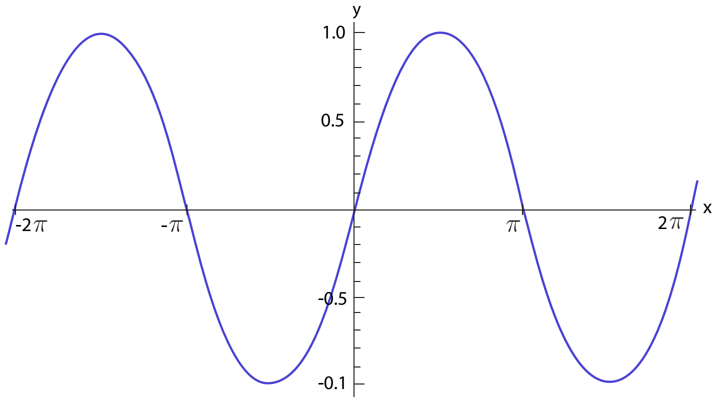
Observa las siguientes gráficas y, tomando como referente la función primitiva f(x)=Sen(x), responde las preguntas:

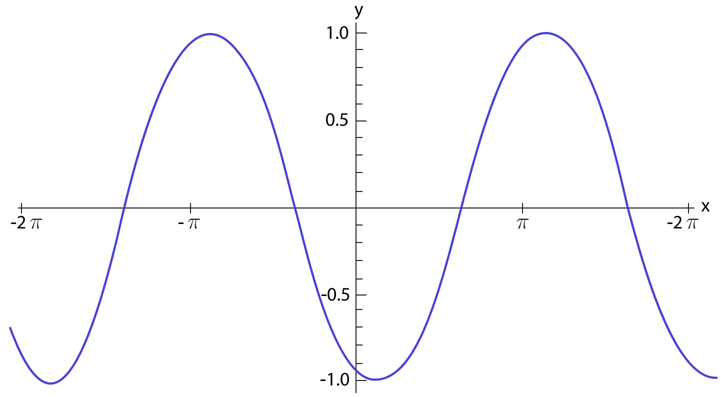




1. ¿Qué sucede con la función sen(x) cuando se le suman 3 unidades?

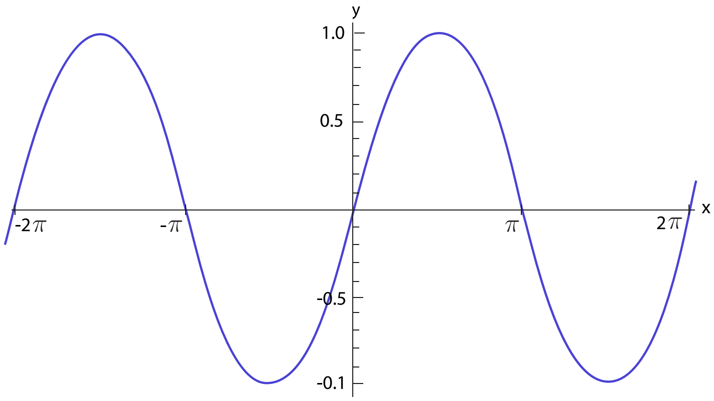
2. ¿Qué sucedería si a la función original se le restan dos unidades?

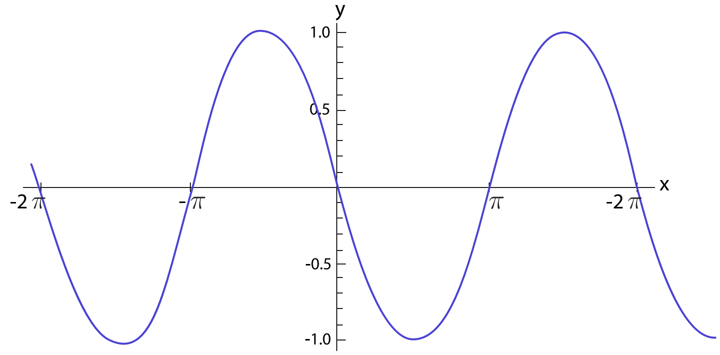




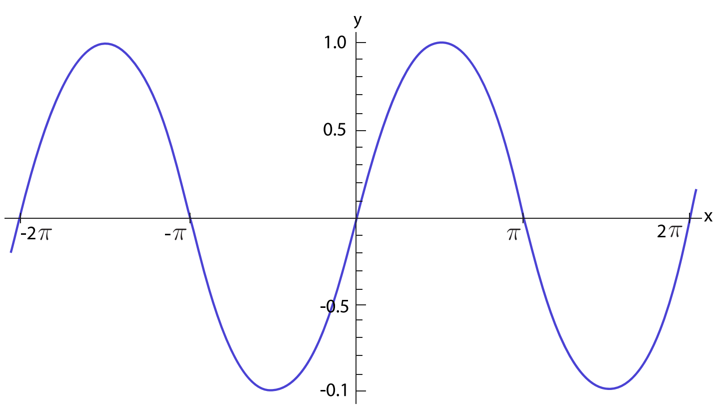
3. ¿Qué sucede cuando a la variable dependiente se le restan dos unidades?

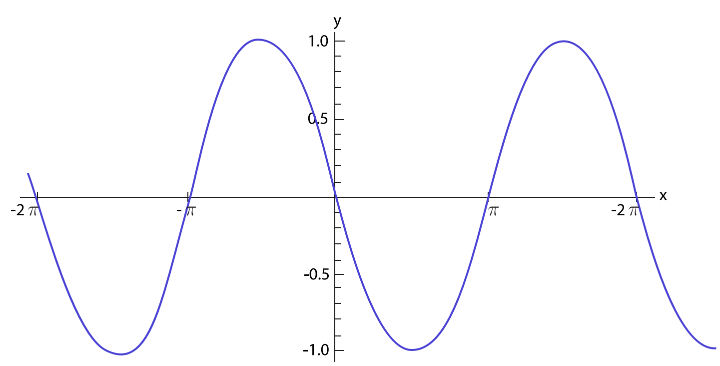
4. ¿Qué sucedería cuando a la variable dependiente se le suman dos unidades?



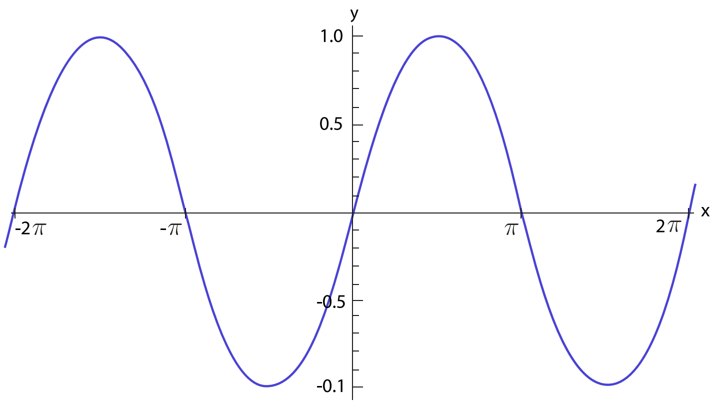


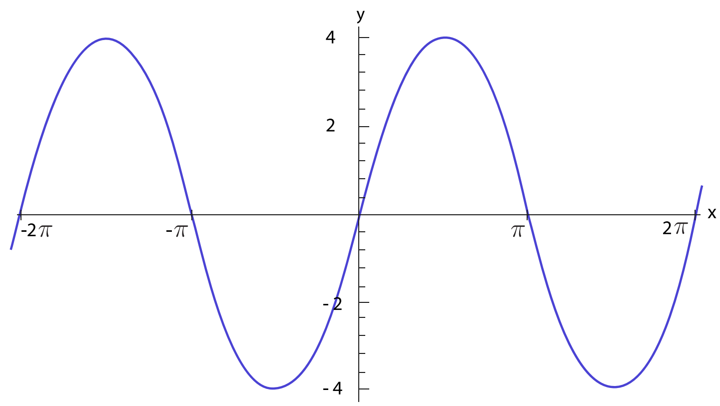
5. ¿Qué sucede cuando la función se multiplica por -1?



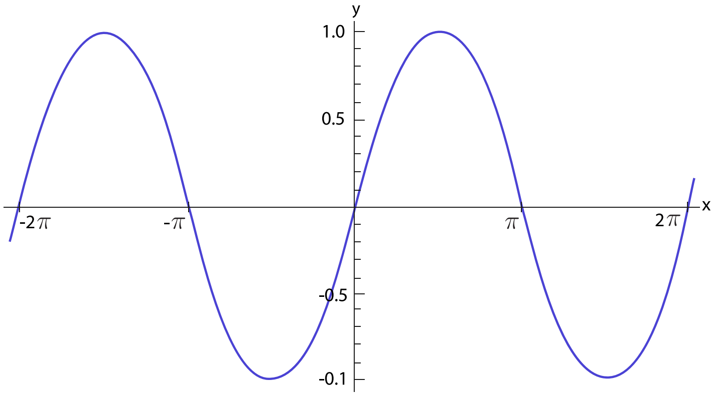


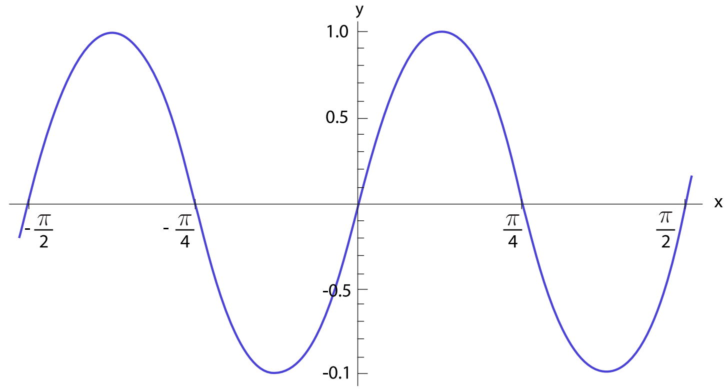
6. ¿Qué sucede cuando la variable independiente es multiplicada por -1?



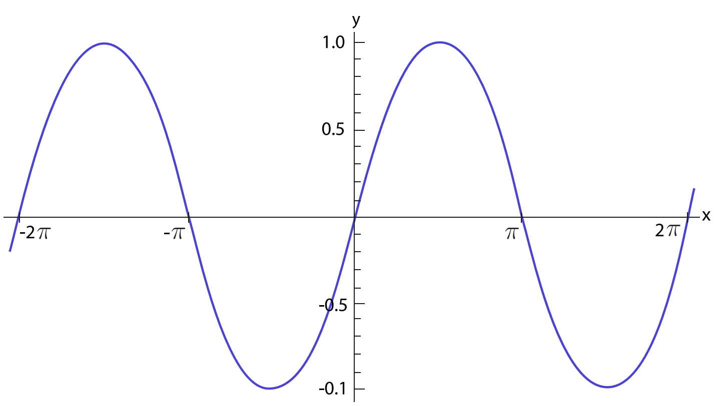


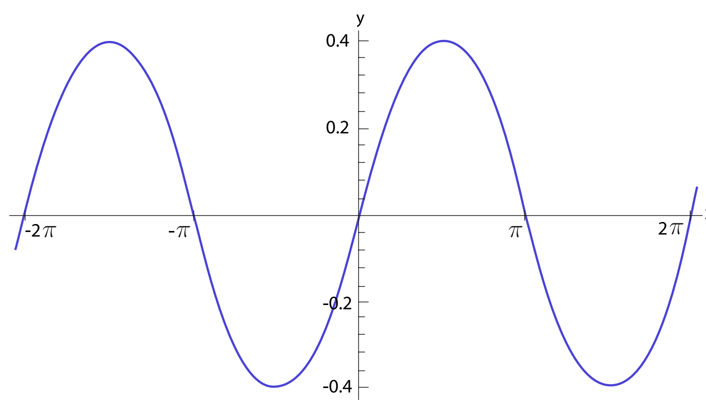
7. ¿Qué sucede cuando la función se multiplica por 4?





8. ¿Y cuando la variable independiente se multiplica por 4?





9. ¿Y qué puede observarse al multiplicarse la función por 0.5?

Complete el enunciado utilizando las palabras adecuadas:

Ejemplo:

La gráfica de y=f(x)+c se obtiene de la gráfica de y=f(x) al desplazarla ___*c*___ unidades hacia ___*arriba*___

a. La gráfica de y=f(x)+7 se obtiene de la gráfica de y=f(x) al desplazarla ________ unidades hacia ________

b. La gráfica de y=f(x)+(-3) se obtiene de la gráfica de y=f(x) al desplazarla ________ unidades hacia ________

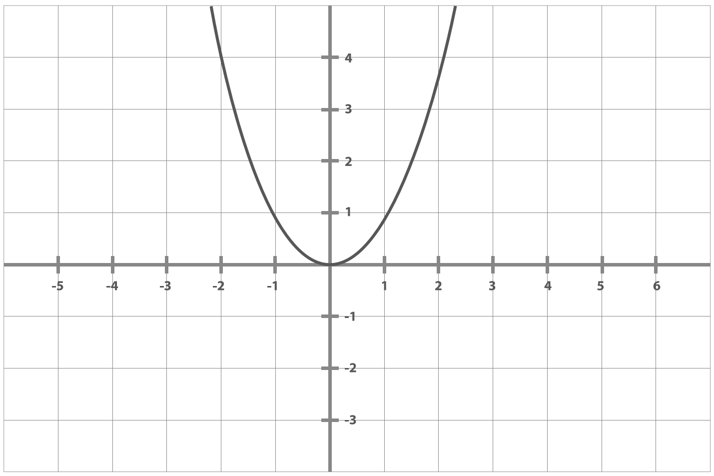
c. La gráfica de y=f(x-5) se obtiene de la gráfica de y=f(x) al desplazar ________ unidades hacia la ________

d. La gráfica de y=5f(x) se obtiene de la gráfica de y=f(x) al alargarla por un factor de __________ unidades en forma ____________

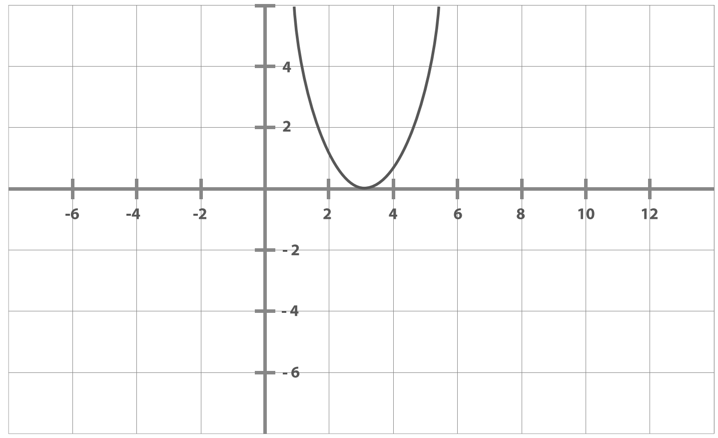
Actividad 2: ¿Cuál es la función según la gráfica?

Observa las siguientes gráficas y compáralas con la función original. Luego responde las preguntas.

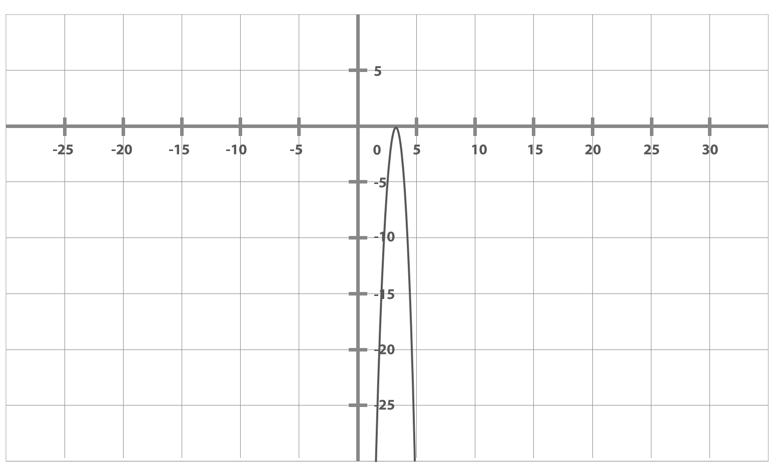
FUNCIÓN ORIGINAL



FUNCIÓN 1

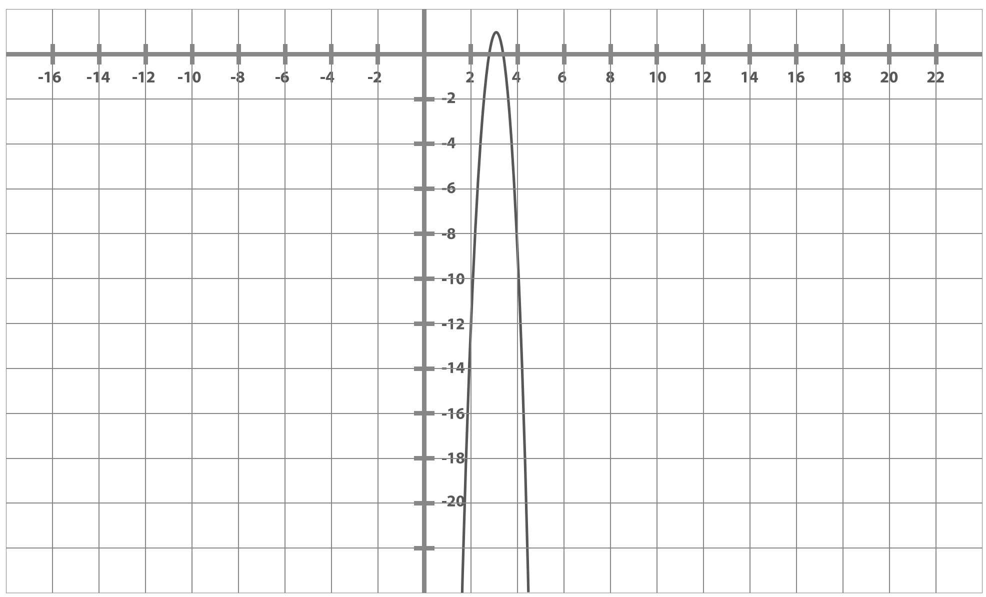


1. ¿Qué diferencia encuentras entre la gráfica de la función 1 y la gráfica de la función original?



FUNCIÓN 2

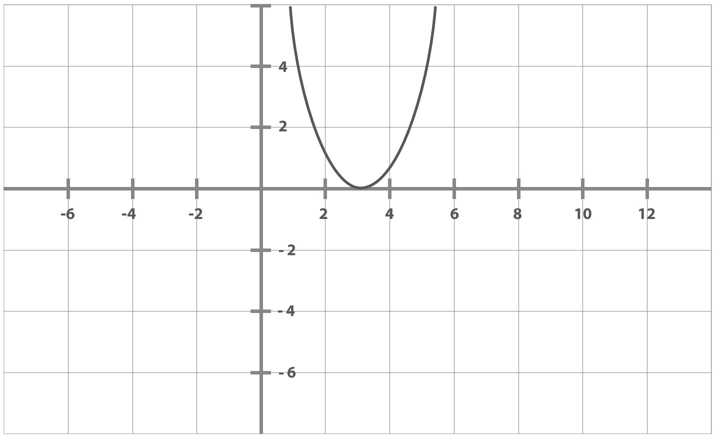
2. ¿Qué diferencia encuentras entre la gráfica de la función 2 y la gráfica de la función original?



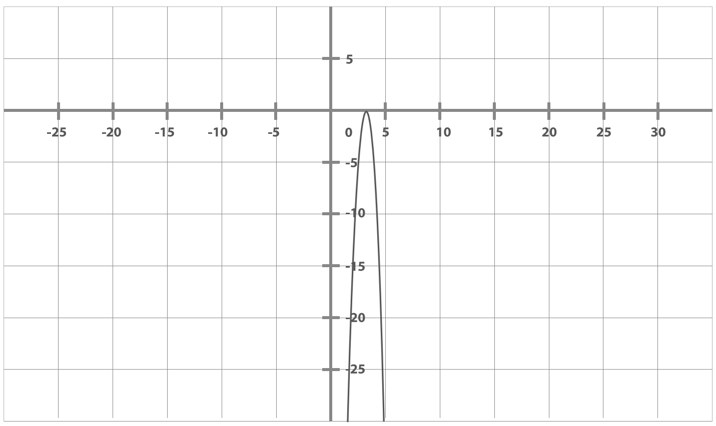
FUNCIÓN 3

3. ¿Qué diferencia encuentras entre la gráfica de la función 3 y la gráfica de la función original?

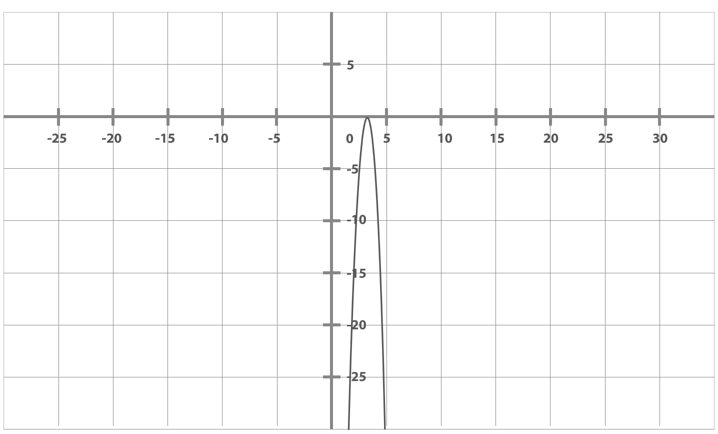
Después de analizar las gráficas anteriores une con una línea la gráfica con su correspondiente función algebraica, luego, justifica tus respuestas.



$$y = -8\,(x - 3)^2$$



$$y = 1 - (x - 3)^2$$



$$y = (x - 3)^2$$

1. Describe ¿cómo analizaste las gráficas para elegir las respuestas anteriores?

A continuación se da la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica.

a. $y = f(x - 4)$

b. $y = f(x)+3$

c. $y = 2f(x + 6)$

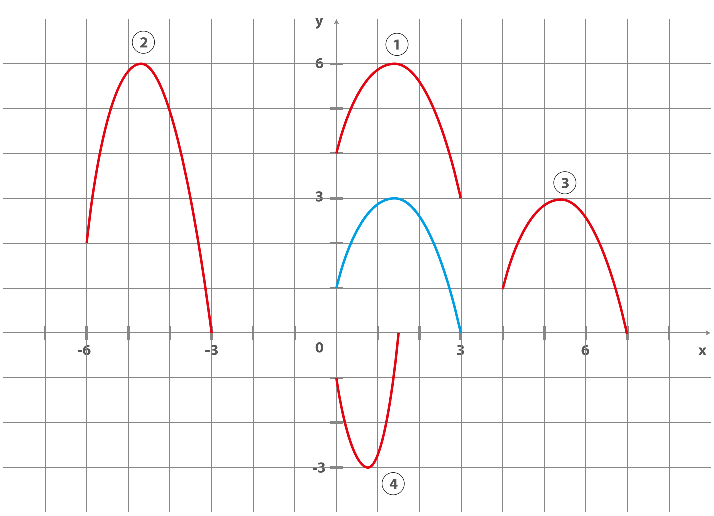
d. $y = -f(2x)$

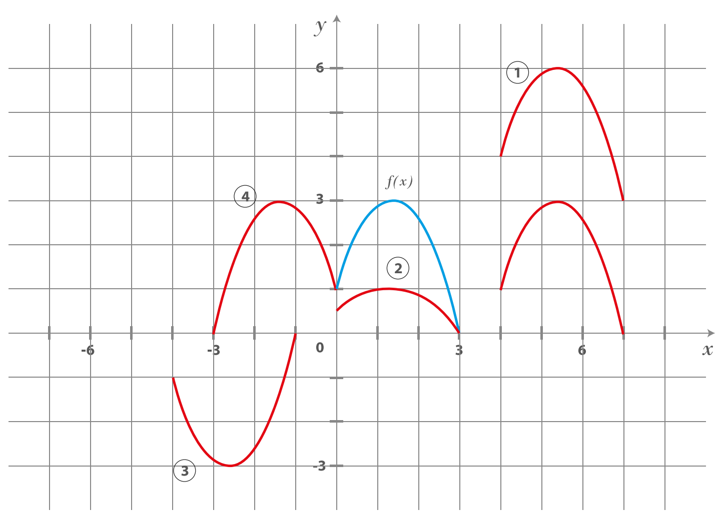
a. $y = \frac{1}{3} f(x)$

b. $y = -f(x + 4)$

c. $y = f(x - 4) + 3$

d. $y = f(-x)$



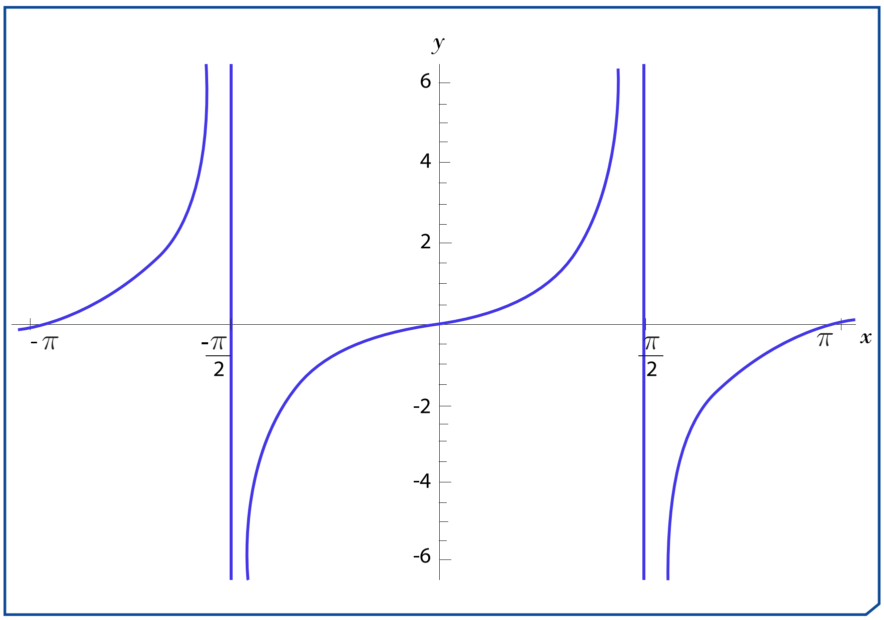


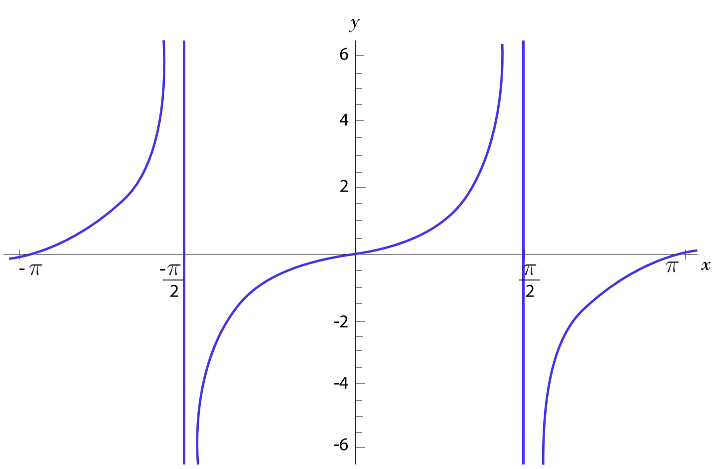
Actividad 3: Describir las transformaciones que se debe aplicar a cada función.

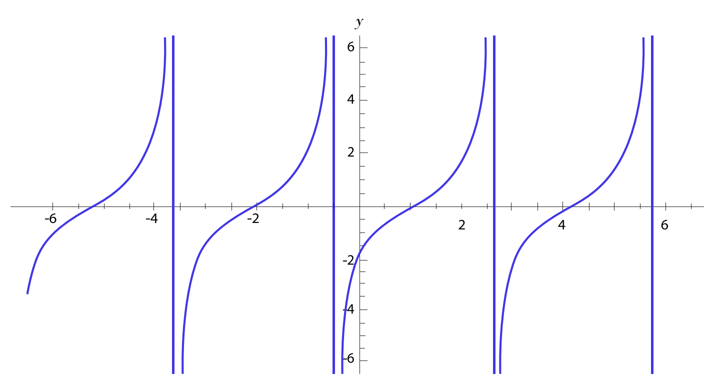
A continuación encontrarás la función primitiva *y = Tan (x)* y algunas transformaciones de la misma. Debes describir la transformación de la gráfica usando únicamente la siguiente terminología:

- Desplazamiento vertical hacia arriba
- Desplazamiento vertical hacia abajo
- Desplazamiento horizontal a la derecha
- Desplazamiento horizontal a la izquierda
- Se refleja respecto al eje "x"
- Se refleja respecto al eje "y"
- Alargamiento vertical
- Contracción vertical
- Alargamiento horizontal
- Contracción horizontal

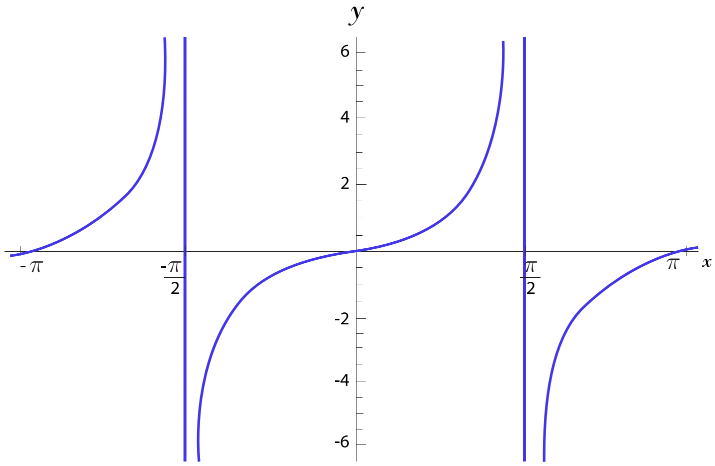
y = Tan (x)

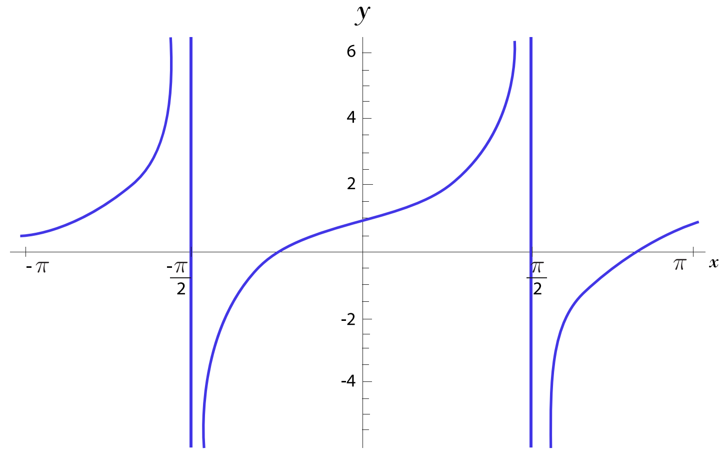




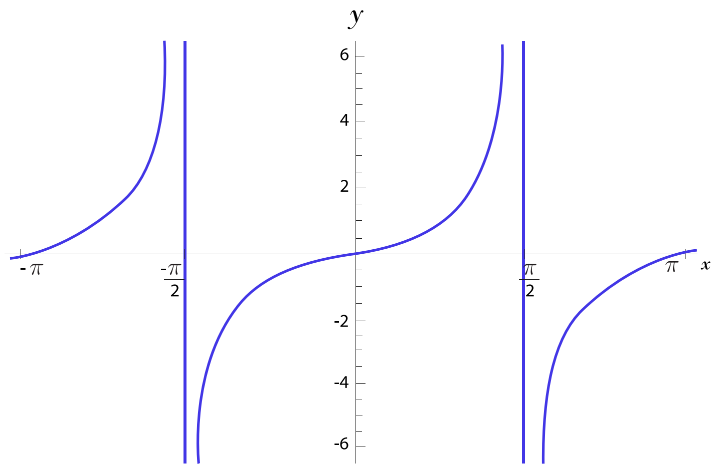


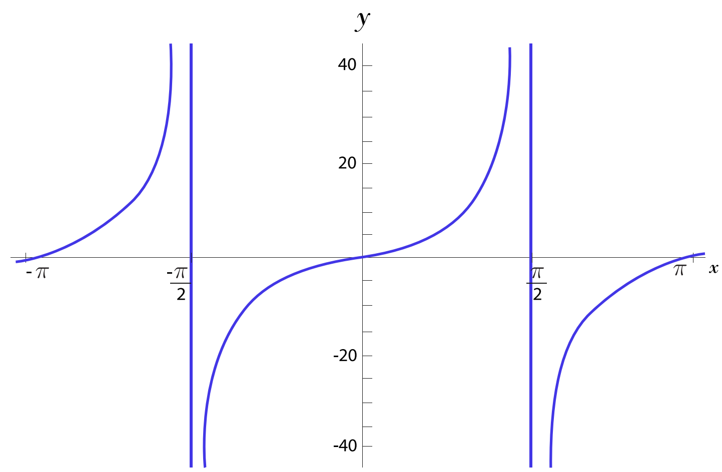
Tipo de transformación: ______________________________



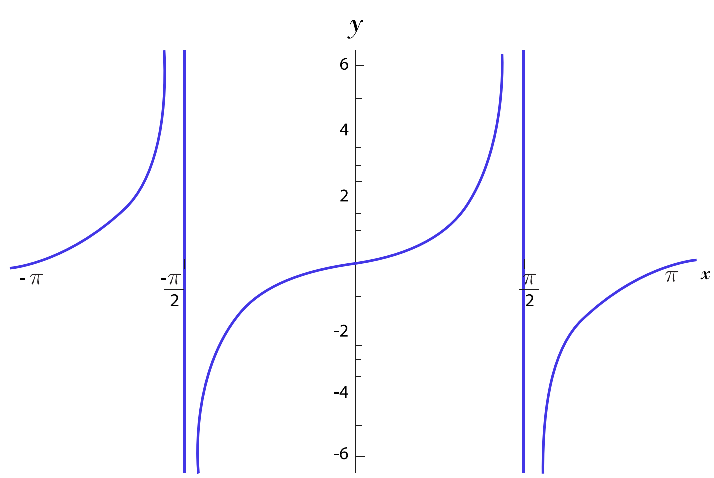


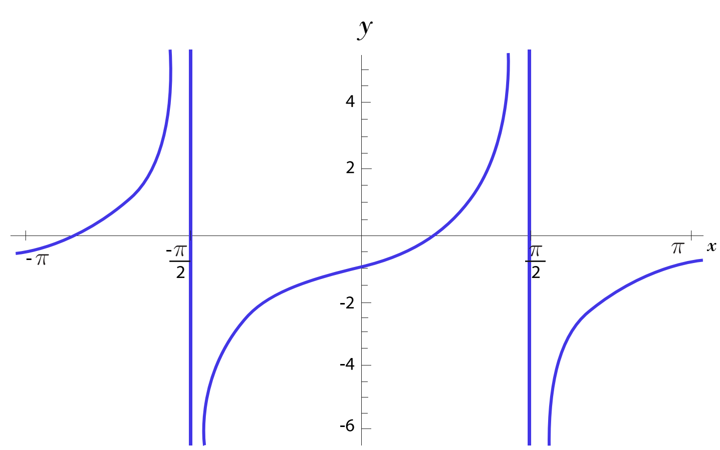
Tipo de transformación: ____



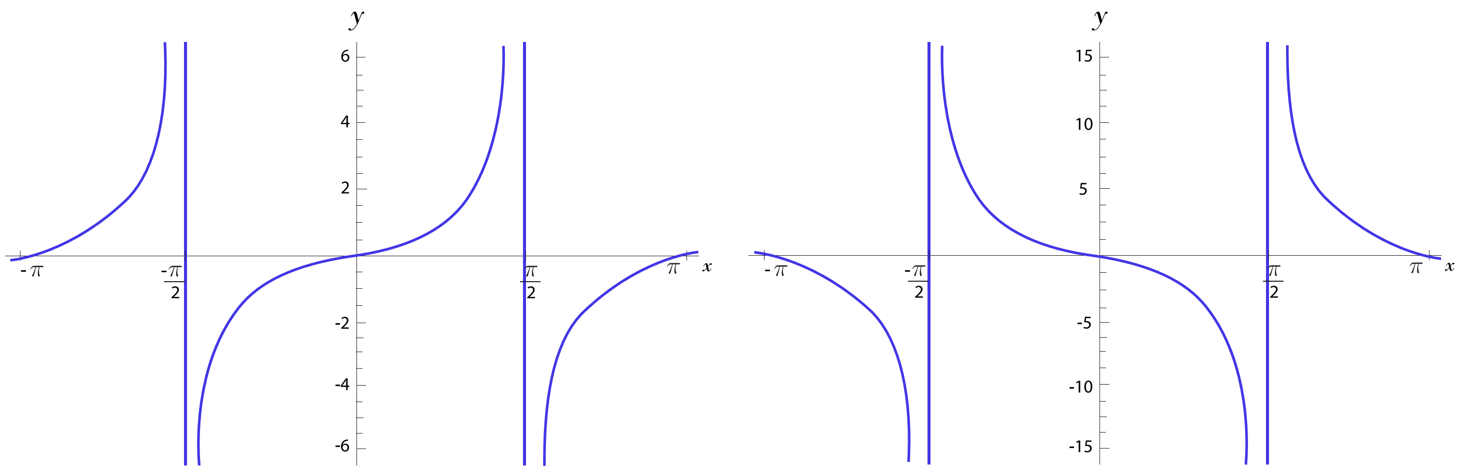


Tipo de transformación: ____

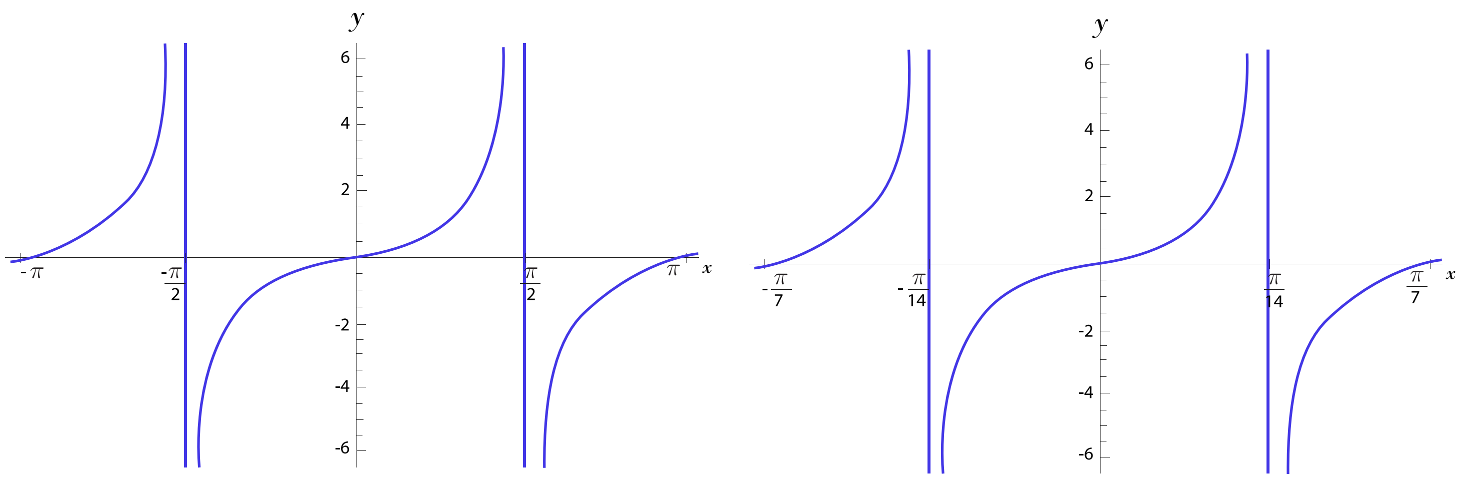




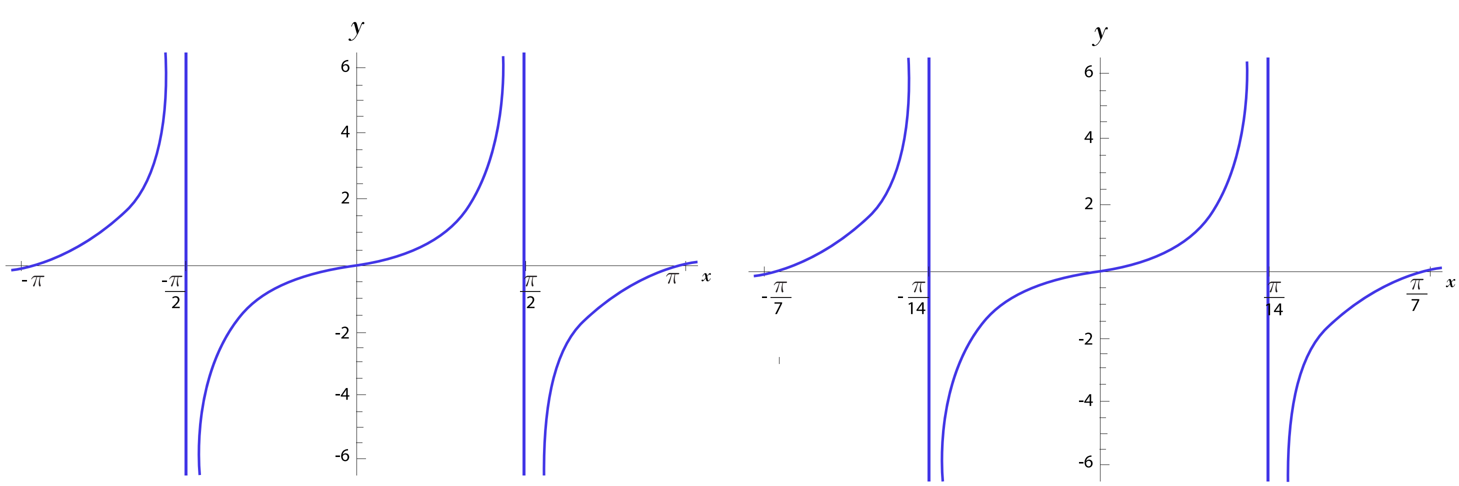
Tipo de transformación: ____



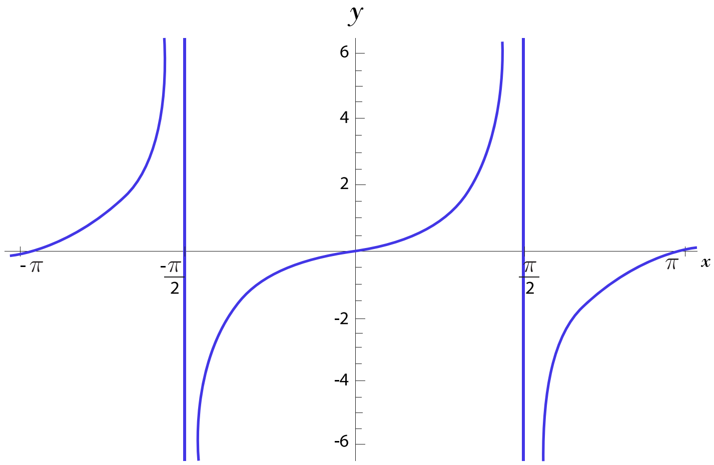
Tipo de transformación: ______________________________

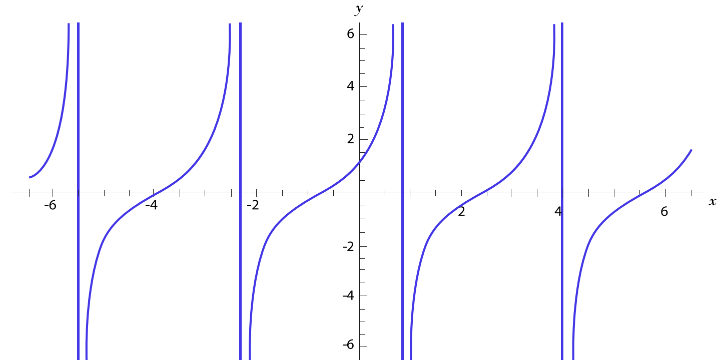


Tipo de transformación: ______________________________

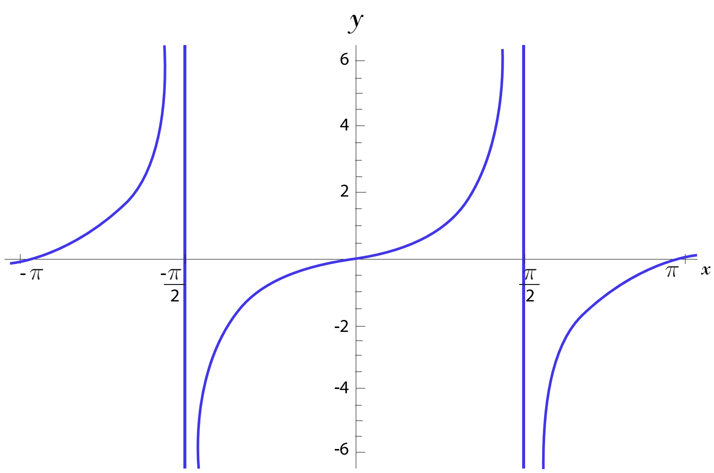


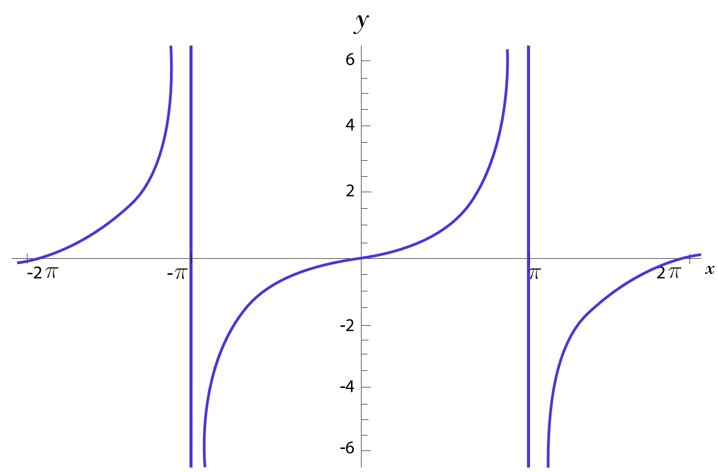
Tipo de transformación: ______________________________



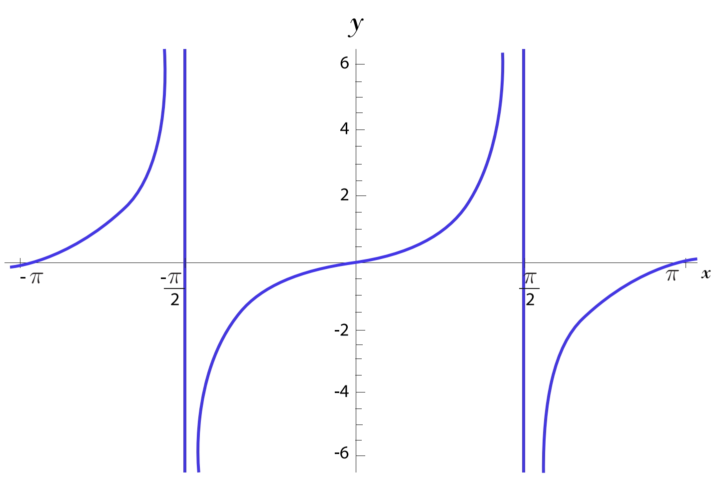


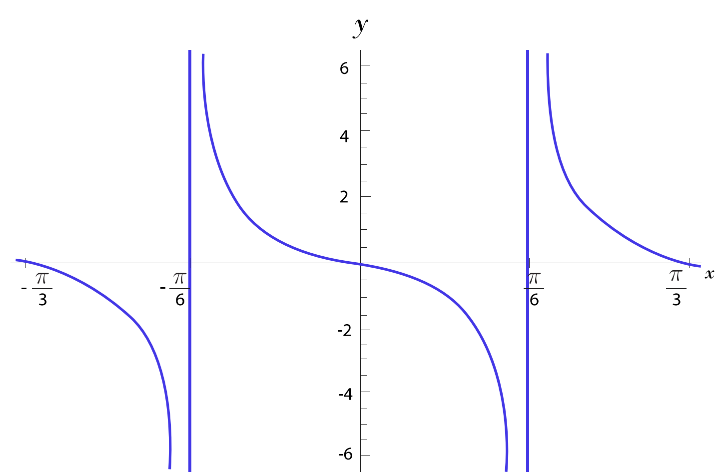
Tipo de transformación: ______________________________



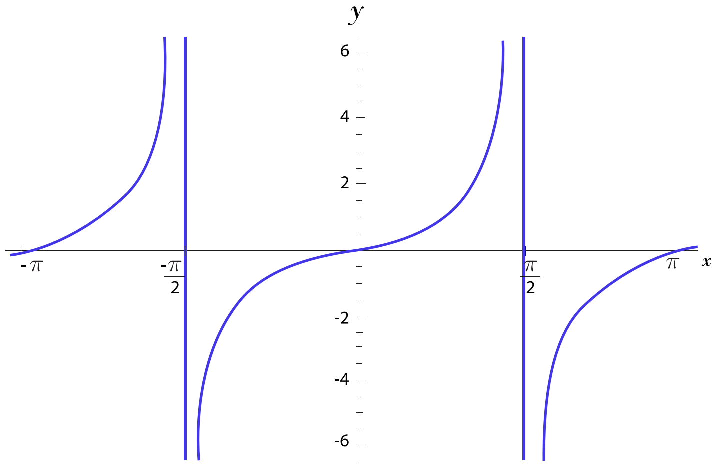


Tipo de transformación: ______________________________



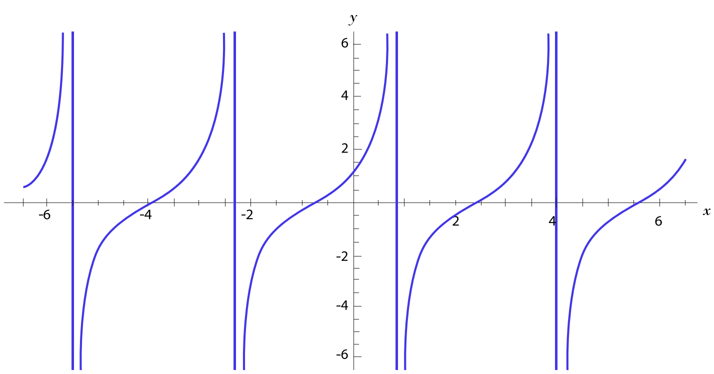


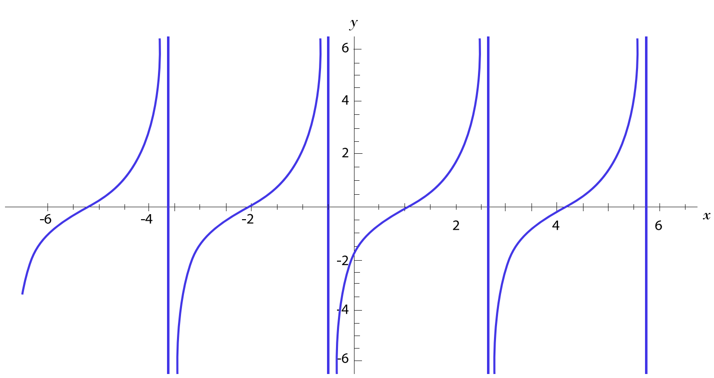
Tipo de transformación: ______________________________

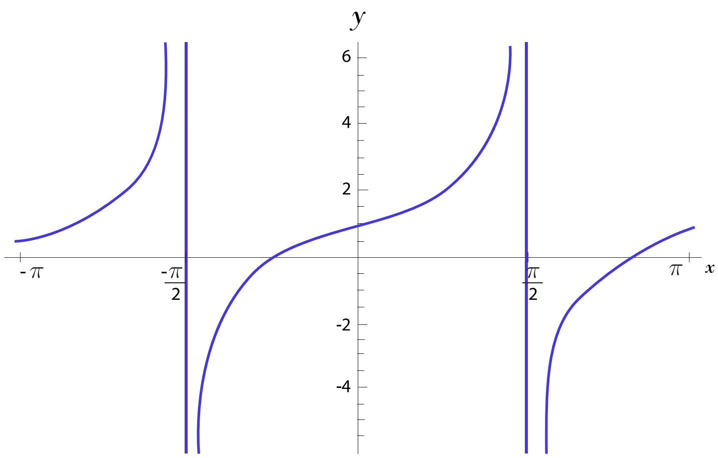


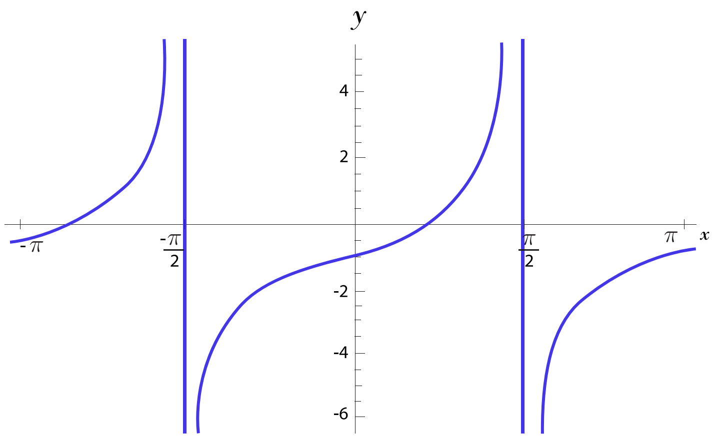
Tipo de transformación: ____

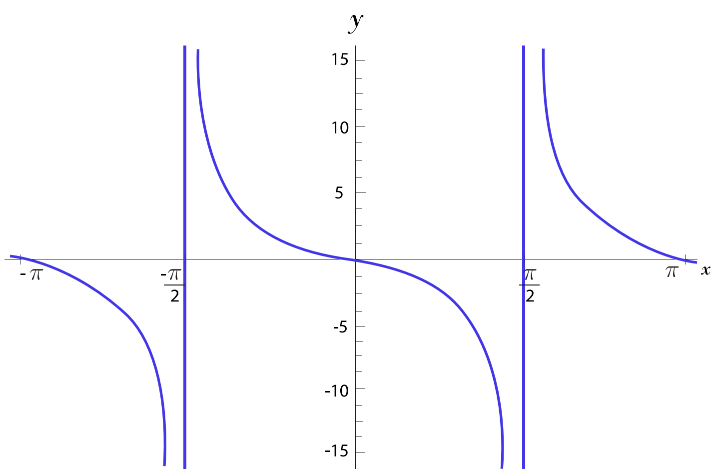
Teniendo en cuenta el análisis realizado anteriormente y las preguntas generadoras utilizadas para realizar el análisis de las gráficas en la actividad 1 (¿Qué sucede si… a la función…?), escribe la función algebraica correspondiente al frente de cada una de las gráficas presentadas:

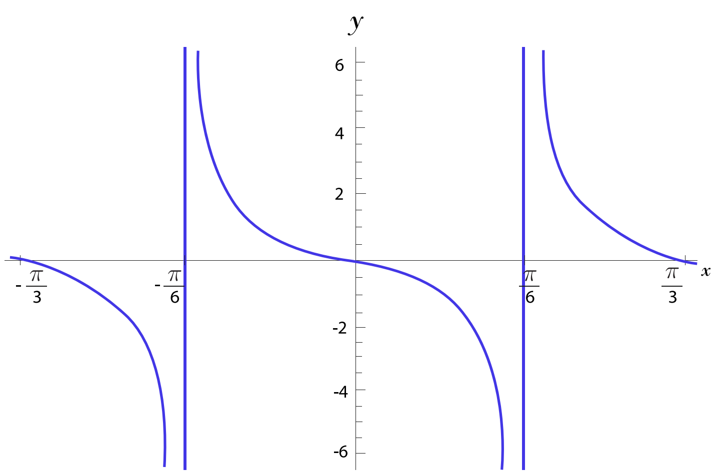


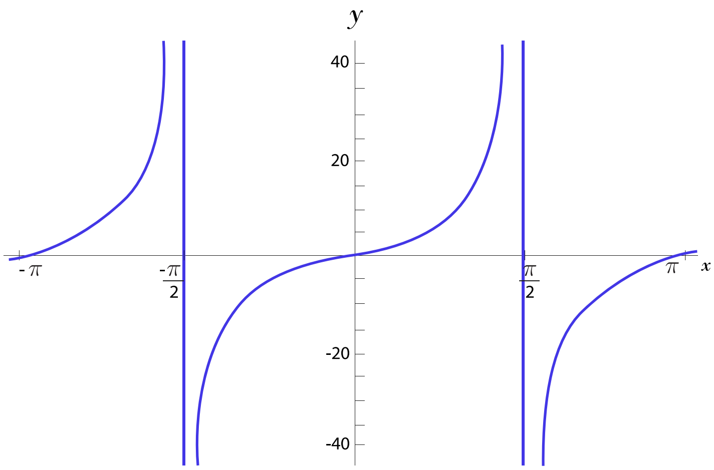


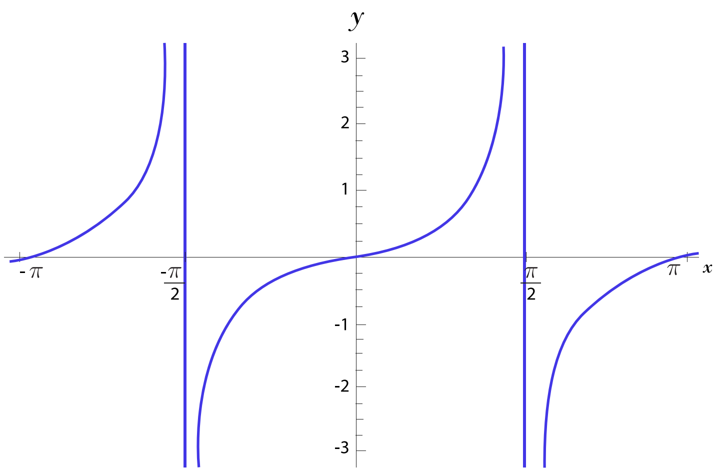

y
6
4
2
-2
-4
- π
-π/2
π/2
π
x

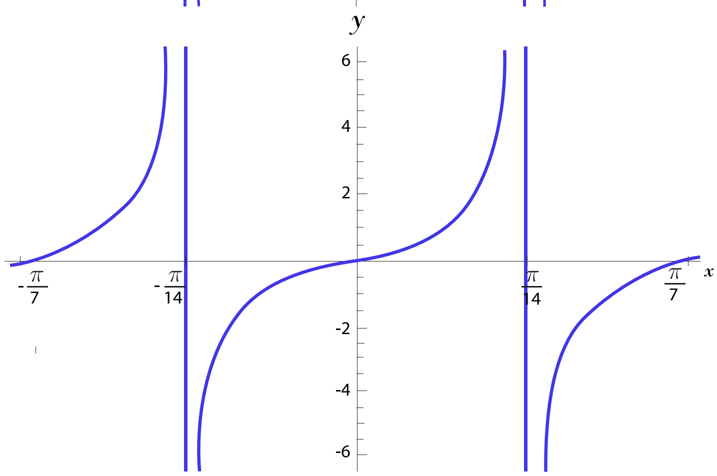

y
4
2
-2
-4
-6
- π
-π/2
π/2
π
x

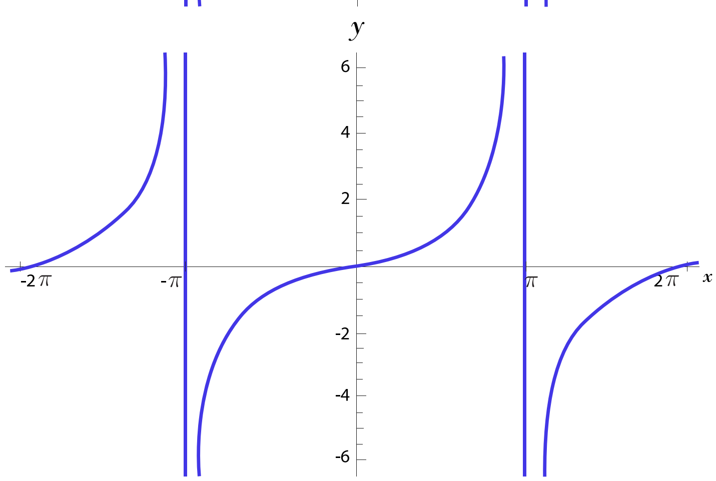

y
15
10
5
-5
-10
-15
- π
-π/2
π/2
π
x

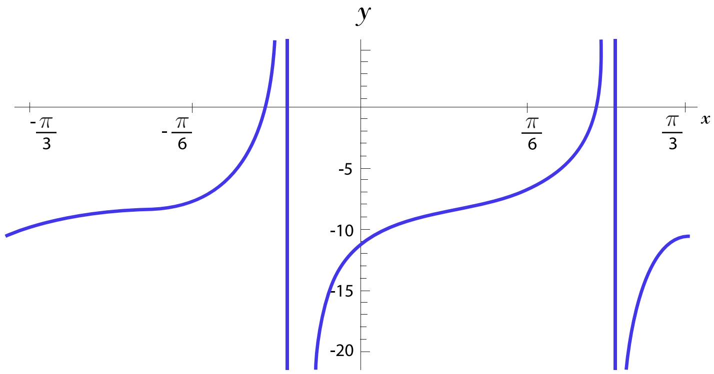

y
6
4
2
-2
-4
-6
- π/3
- π/6
π/6
π/3
x


y
40
20
-20
-40
- π
-π/2
π/2
π
x


y
3
2
1
-1
-2
-3
- π
-π/2
π/2
π
x


y
6
4
2
-2
-4
-6
- π/7
- π/14
π/14
π/7
x

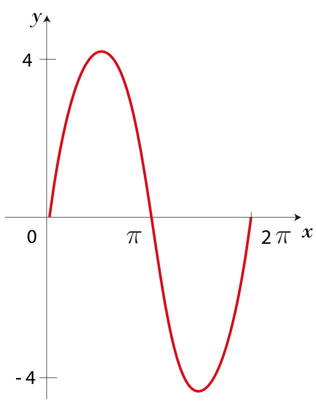

y
6
4
2
-2
-4
-6
-2 π
- π
π
2 π
x

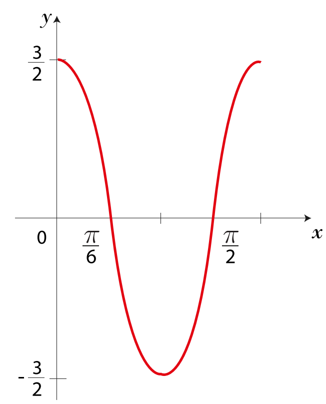


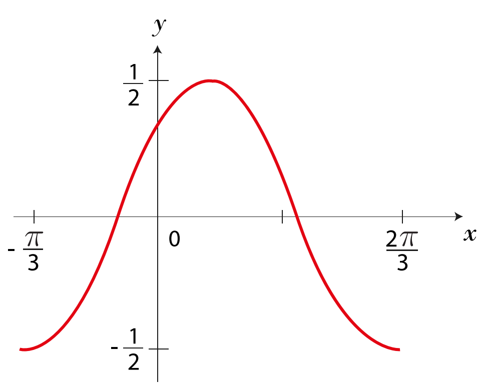
A continuación se presentan las gráficas de algunas funciones trigonométricas cuya forma son:

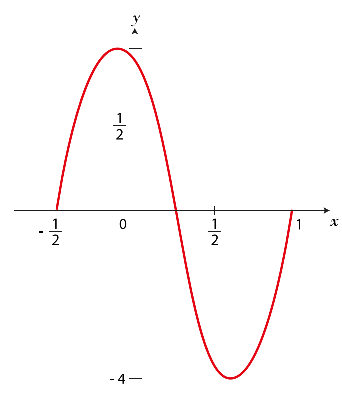
> ***y = csenk (x - h)***
> ***y = ccosk (x - h)***
> donde ***c,k,h*** son números reales.

1. Escriba la ecuación que representa cada una de éstas gráficas:









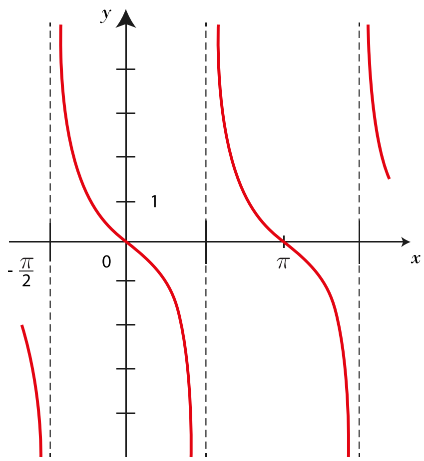
Relacione las funciones trigonométricas con algunas de las gráficas:

$f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $f(x) = -\tan gx$

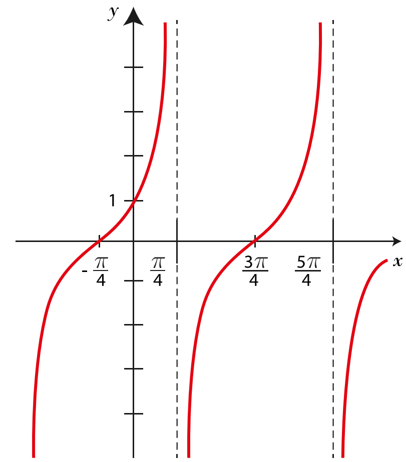
$f(x) = \sec 2x$ $\qquad$ $f(x) = 2\sec x$

$f(x) = \cot 2x$ $\qquad$ $f(x) = 1 + \csc x$

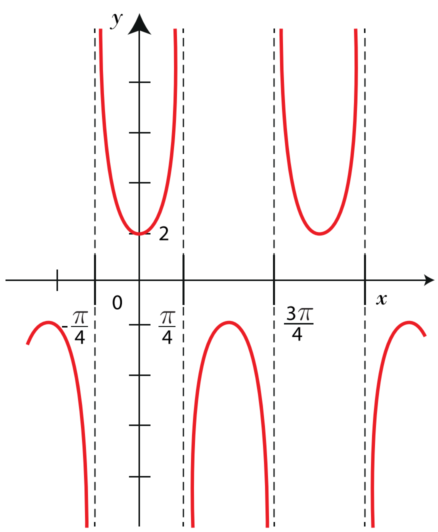
a.



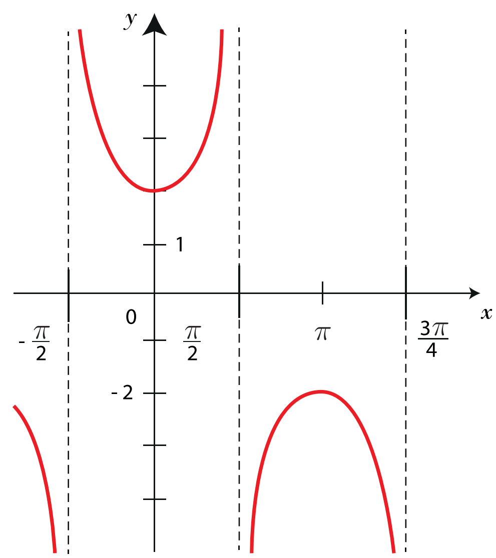
b.



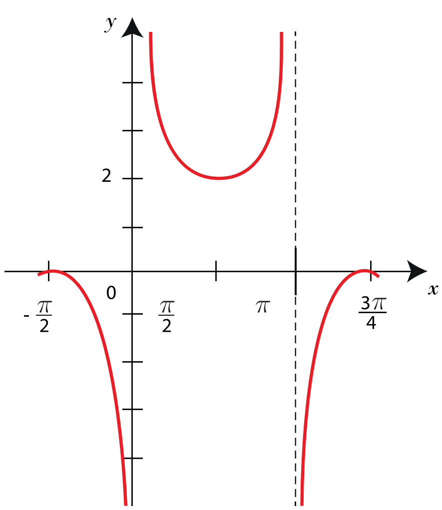
c.



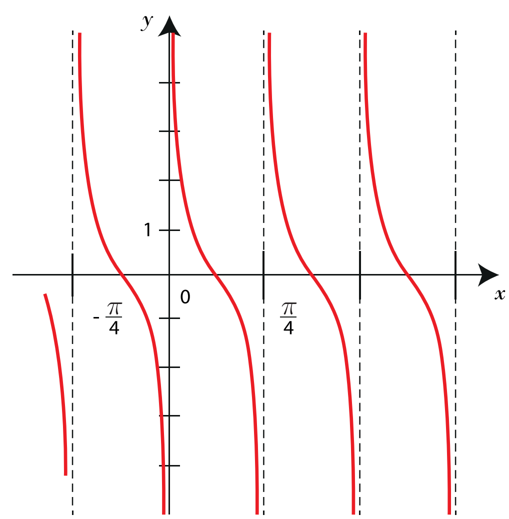
d.



e.



f.

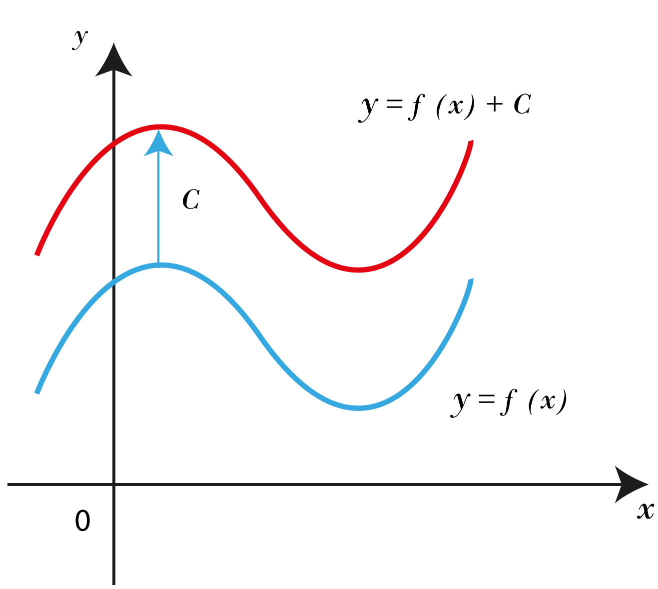
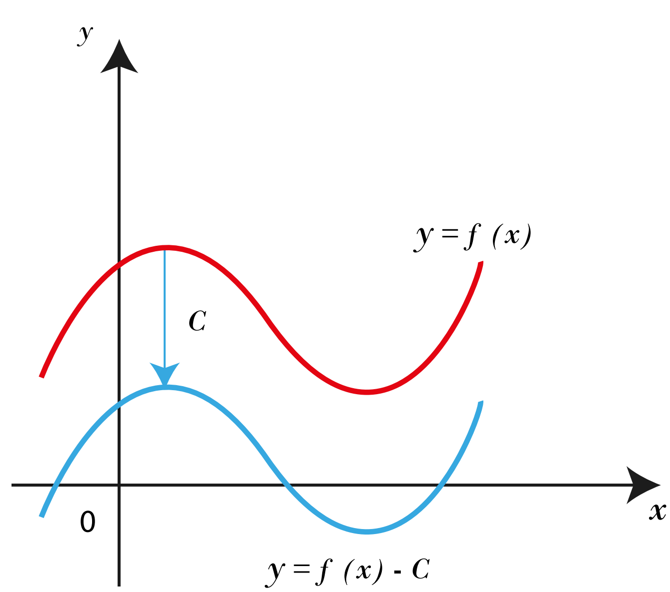


Resumen

Veamos los tipos de transformaciones que se han presentado en las funciones que hemos analizado.

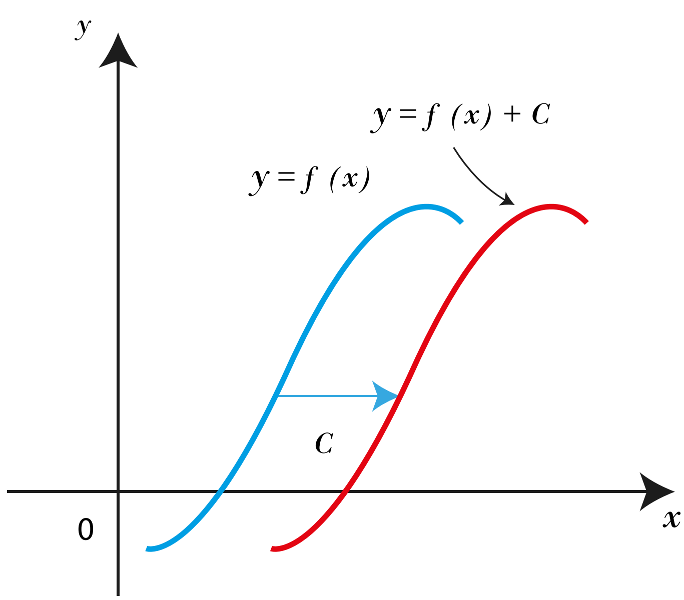
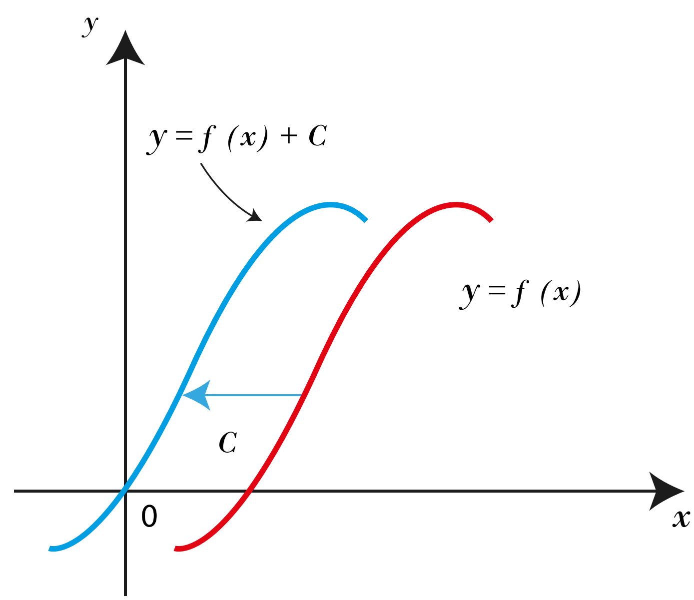
Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es mayor que cero y hacia abajo si es menor que cero. Para resumir lo anterior, considere el siguiente cuadro, donde la gráfica de la función $y = f(x)$ es conocida y c es una constante positiva:

Desplazar verticalmente hacia arriba la función y=f(x)	Desplazar verticalmente hacia abajo y=f(x)
La gráfica $y = f(x) + c$ corresponde a la gráfica $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia arriba.	La gráfica $y = f(x) - c$ corresponde a la gráfica $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia abajo.
	

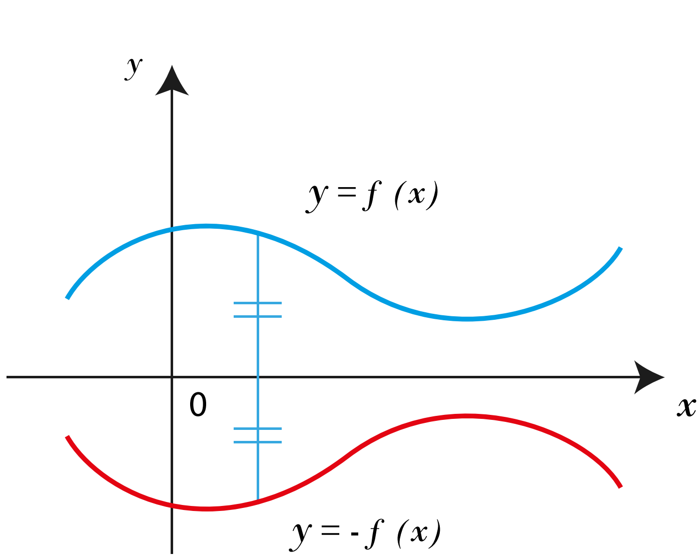
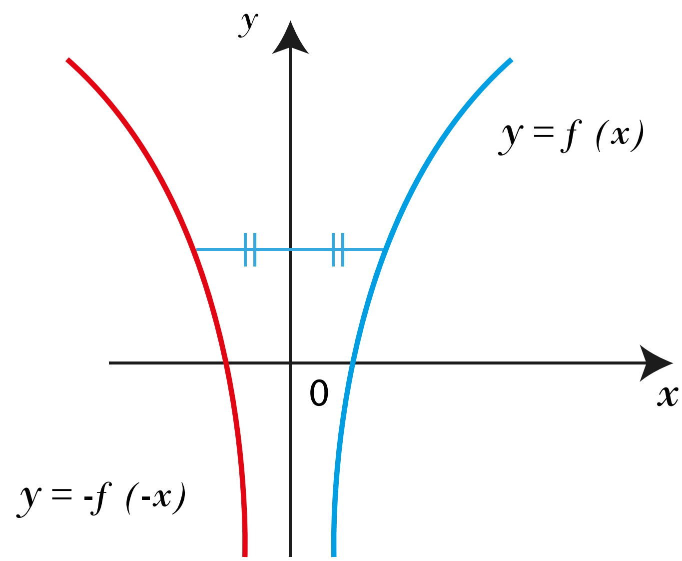
Desplazamiento Horizontal

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$ y se desea desplazar horizontalmente la grpafica de $f(x)$ c unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, para esto considere la siguiente tabla donde c es una constante positiva:

<table>
<tr><th>Desplazar verticalmente hacia arriba la función y=f(x)</th><th>Desplazar verticalmente hacia abajo y=f(x)</th></tr>
<tr><td>La gráfica $y = f(x - c)$ corresponde a la gráfica $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia la derecha.</td><td>La gráfica $y = f(x + c)$ corresponde a la gráfica $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia la izquierda.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

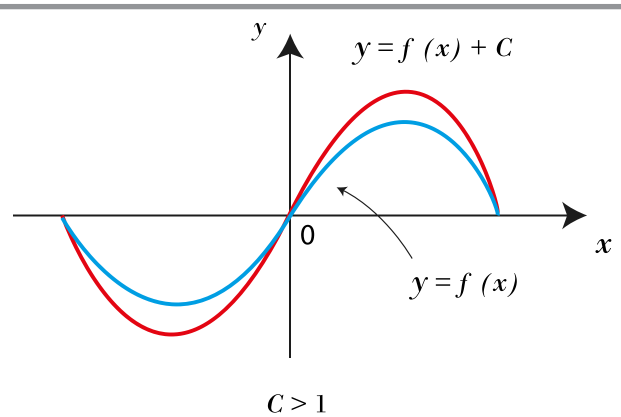
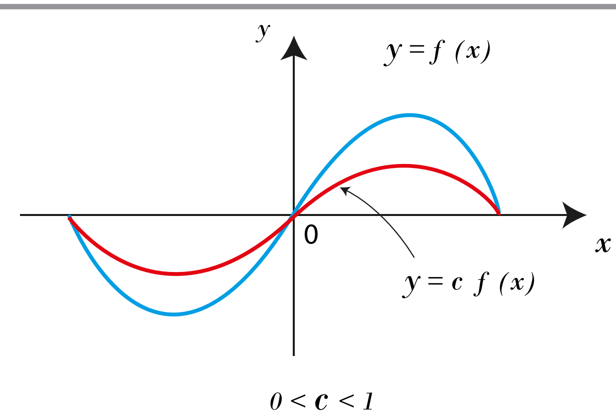
Gráficas que se reflejan

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$ y se desea reflejar con respecto al eje x o al eje y la gráfica de $f(x)$, para esto, considere la siguiente tabla.

Desplazar verticalmente hacia arriba la función y=f(x)	**Desplazar verticalmente hacia abajo y=f(x)**
La gráfica ***y = - f (x)*** corresponde a la gráfica ***y = f (x)*** reflejada con respecto al eje ***x***.	La gráfica ***y = f (- x)*** corresponde a la gráfica ***y = f (x)*** reflejada con respecto al eje ***y***.
	

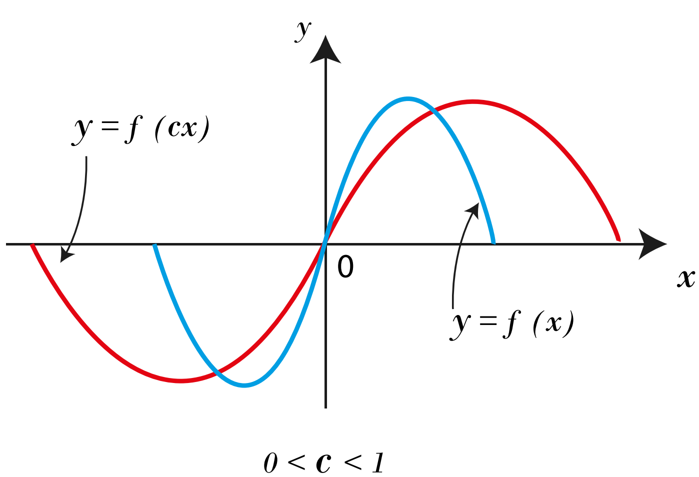
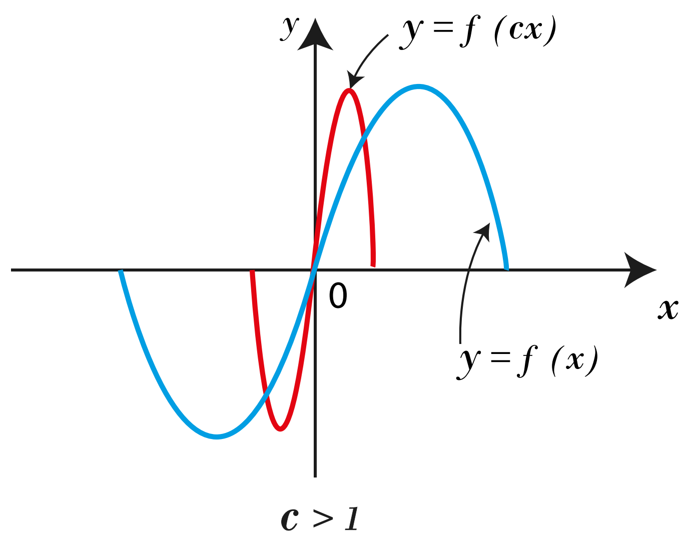
Alargamiento y contracción verticales

Suponga que se conoce la gráfica de ***y = f (x)*** y se desea alargar o contraer la gráfica verticalmente, para esto, considere el siguiente cuadro:

Desplazar verticalmente hacia arriba la función y=f(x)	**Desplazar verticalmente hacia abajo y=f(x)**
La gráfica ***y = f (x) + c*** corresponde a la gráfica ***y = f (x)*** desplazada c unidades hacia arriba.	La gráfica ***y = f (x) - c*** corresponde a la gráfica ***y = f (x)*** desplazada ***c*** unidades hacia abajo.
	

Alargamiento y contracción horizontales

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$ y se desea alargar o contraer la gráfica horizontalmente, para esto, considere el siguiente cuadro:

Alargar la función y=f(x) horizontalmente	**Contraer la función y=f(x) horizontalmente**
La función $y = f(cx)$, alarga la gráfica $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$ cuando $0<c<1$.	La función $y = f(cx)$, contrae la gráfica $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$ cuando $c>1$.
	

Escribe la función original y aplícale la transformación solicitada:

a. Escribe una función primitiva y aplícale un desplazamiento vertical hacia arriba de $\frac{1}{2}$ unidades, grafica las dos funciones que escribiste

b. Escribe una función primitiva y aplícale un desplazamiento vertical hacia abajo de $\frac{3}{2}$ unidades, grafica las dos funciones que escribiste.

c. Escribe una función primitiva y aplícale un desplazamiento horizontal hacia la derecha de $\sqrt{2}$ unidades, grafica las dos funciones que escribiste.

d. Escribe una función primitiva y aplícale un desplazamiento horizontal hacia la izquierda $\pi/2$ unidades, grafica las dos funciones que escribiste.

e. Escribe una función primitiva y aplícale una reflexión en el eje ***"x"*** de 4 unidades, grafica las dos funciones que escribiste.

f. Escribe una función primitiva y aplícale una reflexión en el eje ***"y"*** de 3 unidades, grafica las dos funciones que escribiste.

g. Escribe una función primitiva y aplícale un alargamiento vertical en un factor de 5, grafica las dos funciones que escribiste.

h. Escribe una función primitiva y aplícale una contracción vertical en un factor de $\frac{1}{2}$, grafica las dos funciones que escribiste.

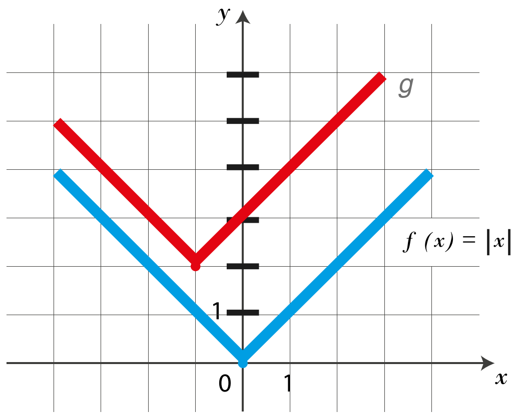
i. Escribe una función primitiva y aplícale un alargamiento horizontal tomando ***"c=0.8",*** grafica las dos funciones que escribiste.

j. Escribe una función primitiva y aplícale una contracción horizontal tomando ***"c=0.3",*** grafica las dos funciones que escribiste.

Tarea

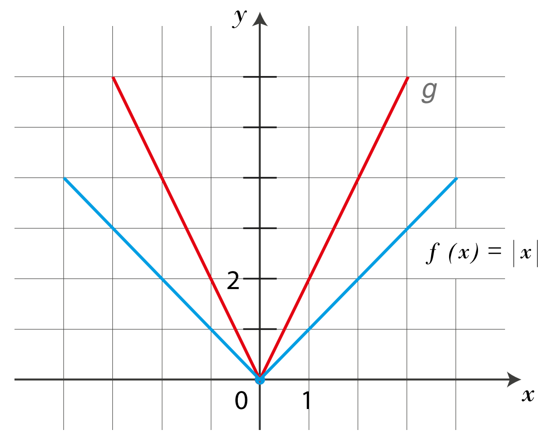
Dadas las gráficas f y g encontrar una fórmula para la función g que cumpla las condiciones de cada gráfica.

a.



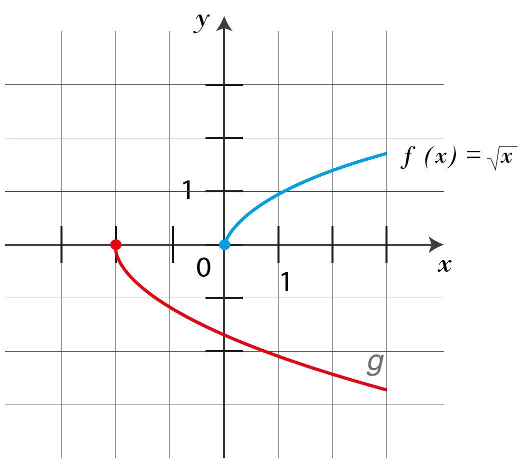
$g(x)=$

b.



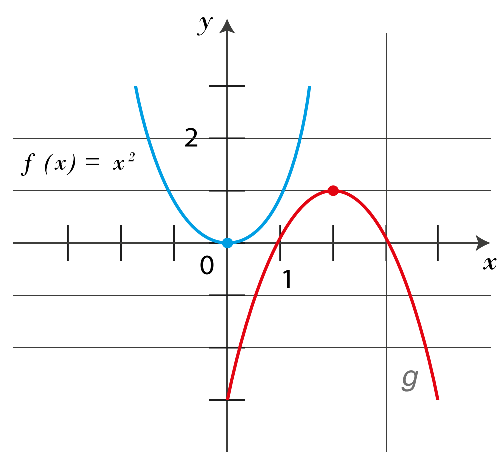
$g(x)=$

c.



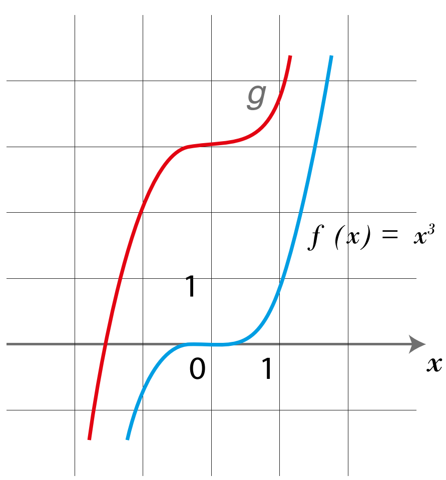
$g(x)=$

d.



$g(x)=$

e.



$g(x)=$