Grado 11

Matematicas - Unidad 3

Conoce el cambio en un instante y describe la situación

Tema

Reconoce el cambio instantáneo como la derivada de la función

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

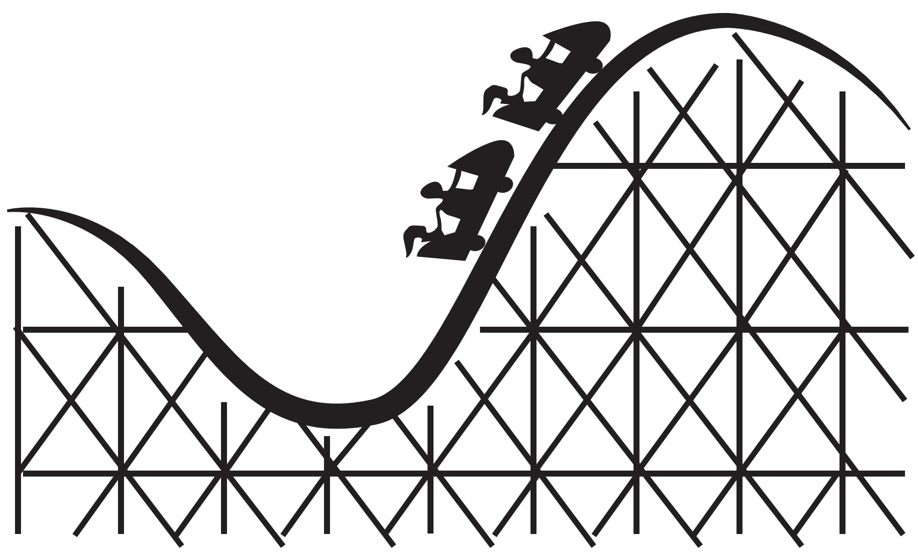
Introducción

Muchas situaciones de la vida real se pueden modelar por medio de una función y el comportamiento de la misma permite reconocer como será la situación. La derivada permite dar más información sobre la función.

Actividad Introductoria: Visitando el parque de diversiones.

1. **Dos jóvenes visitan el parque de diversiones y observando las atracciones buscan similitudes con las funciones y se inquietan por su comportamiento.**

   Observa la montaña rusa y señala los sitios en los que crees que el carro adquiere una mayor velocidad.



Objetivos

- Establecer valores de la derivada de la función a partir de los fenómenos de cambio y variación en situaciones problemas.
  - » Establecer la correlación y variación a medida que una función recorre su dominio
  - » Determinar la derivada de una función.
  - » Utilizar la factorización de Caratheodory en la determinación de la derivada de funciones polinómicas.
  - » Hacer uso de las fórmulas de derivación para encontrar derivadas de funciones compuestas.
  - » Interpretar la derivada de una función a partir de registros gráficos.

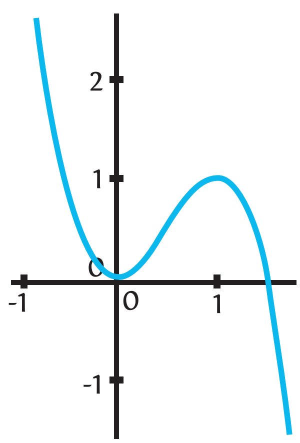
Actividad 1: La montaña rusa.

1. Después de discutir con tus compañeros y docente las partes en qué el carrito de la montaña adquiere mayor o menor velocidad ¿Crees que haya una manera de que, con una gráfica, se pueda saber que tan rápido va el carrito en cada lugar de la montaña rusa?, ¿Si, no y por qué?, discute con tus compañeros y, con ayuda de tu profesor responde esta pregunta.

2. ¿Cómo podrías saber la velocidad en cada punto en cada momento para el carrito?, discute con tus compañeros y, con ayuda de tu profesor responde esta pregunta.

3. Si sabemos que la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración de la montaña rusa son valores correlacionados entre ellos, ¿puedes deducir a partir de la siguiente gráfica, en la que se ve la velocidad del carrito de la montaña rusa con respecto al tiempo, de su ecuación y con ayuda del álgebra, la aceleración?, ¿si, no por qué?.

$$y = -2x^3 + 3x^2$$



4. **Escribe algún método que lleve a hallar la velocidad media.**

5. **Haya la variación de velocidad media con el método propuesto anteriormente en la ecuación** $y = -2x^3 + 3x^2$ **para los siguientes intervalos:**

a. (0,1)
b. (-1,1)
c. (-0.5,0)

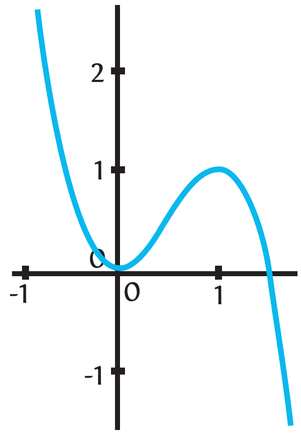
Si se piensa en el método anterior para hallar la aceleración, ¿qué problemas se tendrían?

Para este tipo de problemas se piensa en un valor demasiado cercano pero que no sea el mismo, de aquí surge un nuevo término en matemáticas al que denominamos límite.

Con este nuevo concepto nos es posible escribir una ecuación para hallar la aceleración de un objeto en un instante de tiempo determinado, esta ecuación se escribe de la siguiente manera.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

6. Dibuja las rectas tangentes para 10 puntos de la gráfica y halla el valor de la aceleración en cada punto, con esto determina si el objeto acelera, desacelera o no tiene aceleración para cada uno de los puntos.



Actividad 2: El tobogán.

1. **Después de ver el video propuesto por el docente en el que se ve como un joven se lanza desde un tobogán en el que varía su velocidad con respecto al tiempo que va transcurriendo, ¿crees que sea posible saber cuál es la velocidad exacta que se siente en cada parte del tobogán?, ¿Si, no por qué?**

2. **Puedes utilizar la ecuación planteada para hallar la aceleración en el punto anterior, ¿Sí, no, por qué?**

3. Sabiendo esto, si asumimos que la ecuación que determina el desplazamiento con respecto al tiempo de un joven que se lanzó por el tobogán que observamos en el video es $y = 2x^3+3x$, ¿cuál será su velocidad para cuando han transcurrido 3 segundos, 5 segundos, 20 segundos?

4. Halle la velocidad instantánea para los mismos tiempos dados anteriormente pero asumiendo que la ecuación que determina el desplazamiento con respecto al tiempo es $f(x) = x^2 - 6$

5. **Si deseamos hallar una ecuación que nos determine la velocidad instantánea para cualquier punto ¿cómo lo harías?. Resuelve este punto con ayuda de tu profesor.**

La ecuación que resulta de hallar la razón de cambio en cualquier punto para una ecuación entre dos variables correlacionadas se le llama la derivada de la ecuación.

6. **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = x^2 - x$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = 10$

Actividad 3: Generalización de las derivadas.

¿Para hallar la derivada de una función siempre se debe utilizar el límite? No, se pueden hacer generalizaciones para funciones, intentémoslo

1. Halla la derivada para cada una de las derivadas que se presentan a continuación.

- $f(x) = 3$
- $f(x) = 8$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = -5$

2. ¿Qué pudiste observar en la derivada de cada una de estas funciones?

3. Halla la derivada para cada una de las derivadas que se presentan a continuación.

- $f(x) = 3x$
- $f(x) = 8x$
- $f(x) = -6x$
- $f(x) = -4x + 2$

4. **¿Qué pudiste observar en la derivada de cada una de estas funciones?**

5. **Halla la derivada para cada una de las derivadas que se presentan a continuación.**

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^4$
- $f(x) = x^{1/2}$

6. ¿Qué pudiste observar en la derivada de cada una de estas funciones?

7. Utilizando las generalizaciones encontradas halla la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = x^5$
- $f(x) = 2^x + 5$
- $f(x) = (x + 4)x^2$

Actividad 4: Valores máximos y mínimos de una función.

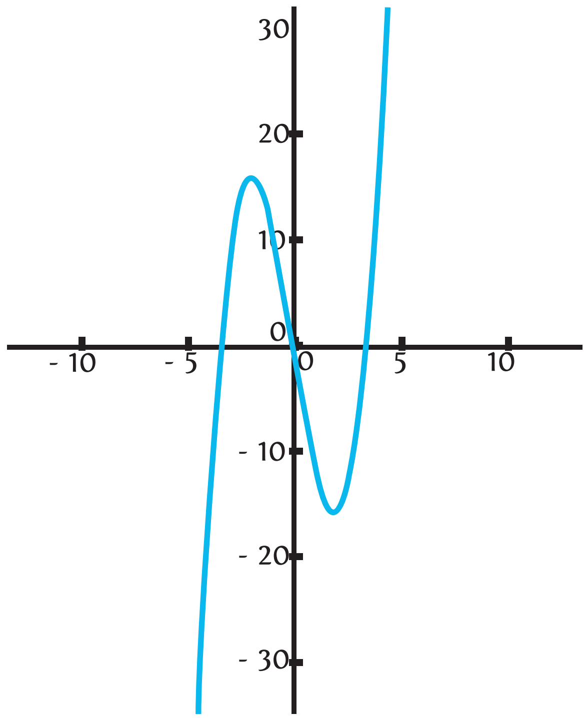
Recordemos algunas definiciones:

Sea *f* una función definida en un intervalo *I* y sea c un número en I.

(i) $f(c)$ es el máximo (o valor máximo) de f en I si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en I.

(ii) $f(c)$ es el mínimo (o valor mínimo) de f en I si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en I.

1. Observa la gráfica y señala los valores máximo y mínimo en el intervalo [-3,5]



2. Calcula la primera derivada. ¿Qué relación existe con los puntos máximo y mínimo?

3. ¿Cómo será la gráfica de la función: $f(x)=4x^2-2$?

Sigue los pasos junto a tu profesor:

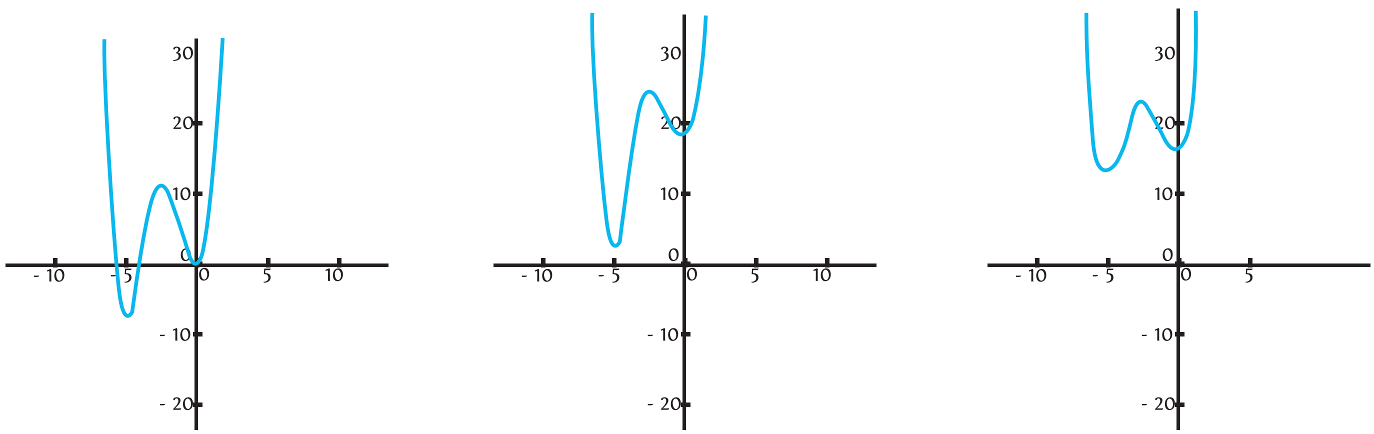
a. Encontrar los puntos de intersección con los ejes coordenados.
b. Encontrar $f'(x)$, ¿en qué intervalos $f'(x) < 0$? ¿en qué intervalos $f'(x) > 0$? ¿Para qué valores de x $f'(x) = 0$?
c. Encontrar $f''(x)$, ¿en qué intervalos $f''(x) < 0$? ¿en qué intervalos $f''(x) > 0$? ¿qué nos pueden aportar estos valores a la construcción de la gráfica?

4. Resuelve los siguientes ejercicios teniendo en cuenta lo anterior:

a. El número de personas que entran al parque está dada por la función $f(x)= -0,5(x-6)^2+250$. ¿Cuál es el número máximo de personas que entraron al parque?. ¿A qué hora se encuentra la cantidad máxima de personas?

b. Esta es la función de la velocidad de un carro en la pista de karts $f(x)=2 \sin(0.5x) + 3$. ¿En qué metros hay menor velocidad?

c. Relaciona las gráficas con su representación algebraica:



- $2.5x^4 + 9x^3 + 8x^2$
- $2.5x^4+9x^3+7x^2+5$
- $1.5x^4+8x^2+7x^3+5$
- $1.5x^4+8x^2+7x^3$

5. Halla los mínimos relativos y/o máximos relativos de las siguientes funciones.

- $f(X) = \text{sen } x$
- $f(X) = x^3 - x$
- $f(X) = \text{sen } x + x$

6. Utilizando los valores máximos y mínimos realiza un bosquejo de las siguientes funciones.

$f(x) = x^2 + 3x - 4$	$f(x) = x^3 + 25x^2 + 74x - 20$
$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$	$f(x) = \operatorname{sen} x + x$

Actividad 5: Método de Caratheodory.

1. Observa el método de Caratheodory.

Caratheodory busca una función c tal que f(x)-f(a) = *c*(x,a)(x-a) y esa función *c* es la derivada.

Ejemplo:

Hallar la derivada $f(x) = x^3$ en x=2

$$x^3 - 2^3 = (x^2 + 2x + 2^2)(x - 2) \quad \text{Factorización}$$

$$c(x,2) = (x^2 + 2x + 2^2)$$

$$c(2) = 2^2 + 2(2) + 4 = 12 \qquad \text{Por tanto } f'(2) = 12$$

2. Ahora utilizando este método halla la derivada de:

- $f(X) = x^2$
- $f(X) = x^4$

3. Contesta para discutir con tus compañeros: ¿Por qué crees que funciona este método?

Resumen

1. **Relaciona mediante una línea los conceptos con la representación algebraica:**

	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
Variación media	$kf'(x)$
Definición de derivada	0
Derivada de una función identidad	1
Derivada de una función constante	$: \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Derivada de una constante por una función	sec^2x
Derivada de la suma de funciones	$cosx$
Derivada del cociente de las funciones	$-senx$
Derivada de función logaritmo natural	$- cscx\ cotx$
Derivada de función exponencial	$secx\ tanx$
$f(x) = senx$	$- csc^2 x$
$f(x) = cosx$	$a^x\ 1na$
$f(x) = tanx$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) = cotx$	$\dfrac{1}{x}$
$f(x) = cscx$	$\dfrac{g(x)\ f'(x) - f(x)\ g'(x)}{[g(x)]^2}$
$f(x) = secx$	

2. Completa para recordar cómo se calculan los valores mínimos y los valores máximos.

Para hallar los puntos críticos en una función se halla la _______________ de la función y se busca para que valores la primera derivada es_______________ , después se halla la _______________ derivada y si f´´(c)____0 entonces es un mínimo relativo y si f´´(c)____0 entonces es un _______________ relativo.

Tarea

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación.

$$f(x) = 10x^2 + 9x - 4$$

$$g(x) = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

$$n(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$lt(r) = r^2\,(3r^4 - 7r + 2)$$

2. Realiza un bosquejo de las funciones y describe la situación teniendo en cuenta los valores máximos y mínimos.

a. Un rectángulo tiene un perímetro de 100m. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?

b. En una noche lluviosa la temperatura fue $T(t) = t^2 - 9t + 8$ y t está entre 0 y 12. ¿Cuál fue la temperatura mínima de esa noche?