Grado 11

Matematicas - Unidad 3

Conoce el cambio en un instante y describe la situación

Tema

Interpretación de la derivada en situaciones de cambio y variación.

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

Muchísimos problemas, no solo de la matemática sino de otras ramas de la ciencia, consisten en determinar el máximo o mínimo valor de cierta cantidad. Frecuentemente escuchamos expresiones como estas: la mayor ganancia, el menor costo, el artículo más barato, el menor tiempo empleado, la menor cantidad de material empleado, el mayor volumen, la menor distancia. Tales problemas son de gran importancia práctica y se pueden resolver con la ayuda de la derivada y aplicando conocimientos adquiridos en las secciones anteriores.

Actividad Introductoria: Montaña Rusa.

1. Imagine la siguiente situación y responda las siguientes preguntas con sus compañeros.

Está en un parque de diversiones y sube en la montaña rusa, imagine que puede medir tiempos en diferentes puntos de la montaña rusa, por ejemplo cuando inicia el recorrido, cuando llega a la primera cima, etc., (ver tabla)

Tiempo	0	1	2	3	4.5	5	6	7	8
Distancia	2	7	18	41	11,125	147	242	373	546

a. ¿Qué es una velocidad promedio?

b. ¿Con esta información puede calcular velocidades promedios en intervalos diferentes de tiempos?

c. ¿Qué es una aceleración promedio?

d. ¿Hay suficiente información para calcular alguna aceleración promedio?

Objetivos

- Encontrar relaciones cuantificables entre la noción de derivada y situaciones de variación en el entorno.
  - » Determinar modelos adecuados que se ajusten a situaciones de cambio.
  - » Apropiar reglas de cálculo alternativas para encontrar límites.

Actividad 1: Análisis de una montaña rusa.

1. Responda las siguientes preguntas usando solamente su experiencia de vida.

a. Si se encuentra en la cima de una montaña rusa y miras hacia un lado ¿Qué sucede con el paisaje?

b. ¿Qué siente una vez inicia el descenso?

c. Durante el descenso ¿Qué pasa con el paisaje alrededor?

d. ¿Qué siente una vez termina el descenso e inicia un ascenso?

2. Ahora se darán unas definiciones y vuelva a responder las preguntas anteriores usando estas definiciones.

Posición: Es la ubicación en un lugar de algún objeto.

Velocidad: Es el cambio de posición respecto al tiempo.

Velocidad promedio: Cambio de posición en un intervalo de tiempo.

Velocidad instantánea: Cambio de posición en un instante de tiempo determinado.

Aceleración: Es el cambio de velocidad respecto al tiempo.

Aceleración promedio: Cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.

Aceleración instantánea: cambio de velocidad en un tiempo determinado

Con base a las definiciones anteriores las fórmulas para determinar velocidades y aceleraciones son:

Velocidad promedio: $V_p = \dfrac{s(x_2) - s(x_1)}{x_2 - x_1}$

Velocidad instantánea: $V_i = s'(x)$ (Derivada de la posición)

Aceleración promedio: $A_p = \dfrac{V_p(x_2) - V_p(x_1)}{x_2 - x_1}$

Aceleración instantánea: $A_i = V'_i = s''(x)$ (derivada de la velocidad instantánea o segunda derivada de la posición).

3. Suponga que la posición de un carro de una montaña rusa está dada por la ecuación

$$s(t) = -3t^3 + 2t^2 + 5t$$

a. Tabule esta función con los tiempos dados en la siguiente tabla.

Tiempo	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
Distancia S(t)											

b. Calcule las velocidades promedio en diez intervalos diferentes, use intervalos cada vez más pequeños.

c. Calcule la velocidad instantánea en algún tiempo de los intervalos anteriores.

d. Compare sus respuestas del ítem [b, c] y analice el porqué de esta diferencia.

e. Calcule las aceleraciones promedios en los mismos intervalos escogidos en el ítem [b].

f. Calcule la velocidad instantánea en alguno de los intervalos anteriores.

g. ¿Se puede concluir que la velocidad promedio es igual a la velocidad instantánea?

h. ¿Lo mismo ocurre para la aceleración?

Actividad 2: Velocidad máxima de un carro de montaña rusa.

1. **En la montaña rusa se ha encontrado la velocidad del carro en cualquier instante con la función**

$$\text{velocidad instantanea}=V_i\,(t)= s'(t)= -9t^2 + 4t + 5$$

Encontrar la máxima velocidad del carro en la montaña rusa.

Para el desarrollo de este problema siga las siguientes indicaciones:

a. Tabule esta función en la siguiente tabla.

Tiempo	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
Velocidad v(t)											

b. Grafique la información obtenida en el ítem [1] en el plano cartesiano teniendo en cuenta que el eje de las abscisas es el tiempo y el eje de las ordenadas es la velocidad.

c. Use la gráfica para estimar (dar una aproximación) de la máxima velocidad y el momento en que toma esta velocidad.

d. Siga los siguientes pasos para encontrar el máximo de la una función:

Para encontrar el máximo o mínimo de alguna función se debe:

Siga los siguientes pasos para encontrar el máximo de la una función:

Para encontrar el máximo o mínimo de alguna función se debe:

- Calcular la primera derivada de la función. Par este caso es: ______________________

- Mirar los puntos de discontinuidad de la función derivada, si los hay.

  Para este caso es

- Igualar a cero la derivada de la función. Para este caso se hace: ______________________

- Despejar el valor de t. Para este caso el valor de t es: ______________________

  ¿Qué indica este valor de t? ______________________

  ____

- Se calcula la segunda derivada para confirmar si es un máximo o un mínimo. Para este caso la segunda derivada es: ______________________

- Se sustituye en la segunda derivada el valor de t obtenido el paso [d] y se observa el signo resultante. Si el signo es positivo, el valor obtenido en el paso [d] es un mínimo; si el signo es negativo, el valor obtenido en el paso [d] es un máximo, para nuestro caso tenemos que es ____________________ por lo tanto es un ______________________ .

- Para obtener la velocidad máxima (máximo o mínimo) se debe sustituir el valor obtenido en el paso [d] en la función de velocidad original, es decir, $v(t)=-9t^2+4t+5$, haciendo los cálculos, se obtiene: ____

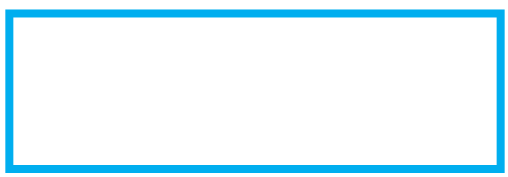
  que se interpreta como: ____

Actividad 3: Aplicaciones en la vida cotidiana.

1. Un campesino que quiere cercar una parte de sus terrenos en forma rectangular pero solo cuenta con 4200 metros de cerca. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para obtener un área máxima? ¿Cuál es el área del terreno cercada?

Para el desarrollo de esta actividad usa las siguientes definiciones y sigue el procedimiento.

El perímetro de una figura es la medida o longitud del contorno de cualquier figura plana.



El área de una figura es la medida de la superficie dentro de un contorno de una figura plana. En la figura el área es la parte azul.

Una vez establecido lo que es un área y un perímetro se debe establecer cómo solucionar el problema.

a. Graficar la situación. Establecimiento medidas tanto conocidas como desconocida asignando variable, por ejemplo x para la base, y para la profundidad y A para el área.

   Grafique la situación.

b. Identificar la función objetivo, es decir, la función a optimizar. ¿Para este caso cuál es la función que se debe optimizar?

c. Usar la información del problema para eliminar todas las variables a excepción de una en la función objetivo.

i. Determine el perímetro del terreno usando la información dada en el problema y el ítem [a].

ii. Despeje alguna de las variables del perímetro

iii. Determine el área del terreno usando la información del ítem [a].

iiii. Sustituya la variable despejada en el ítem [b] en la ecuación obtenida en el ítem [iii].

d. Hallar su derivada y sus valores críticos.

- Derivada de la función objetivo.

- Puntos críticos.

d. Finalmente la conclusión es

Actividad 4: Regla de L´Hopital.

En muchas ocasiones el cálculo de límites indeterminados se puede facilitar si se conoce el comportamiento de las funciones en los puntos y el comportamiento de sus respectivas derivadas. Para esto se debe usar una regla que facilitaría los cálculos teniendo precaución en las condiciones de la regla.

Regla de L´Hopital: Si el límite de una función racional es de la forma 0/0 ó ∞/∞ se puede recurrir a las derivadas tanto del numerador como el del denominador para quitar esta *indeterminación*.

$$\lim_{X\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{X\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Es muy importante tener la condición de función racional de la forma 0/0 ó ∞/∞.

Ejemplo 1:

Dada la función $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

se quiere ver su comportamiento cerca de cero. Al hacer un análisis se puede encontrar que tanto el numerador como el denominador son casi cero, lo que lleva a una indeterminación, por tal razón usando la regla de L´Hopital se puede encontrar un mejor análisis de esta situación.

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Así, se puede afirmar que la función $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$ es casi cero cerca del cero.

1. Usar la regla de L'Hopital para calcular:

$$\lim_{X \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

2. Uso indebido de la regla de L´Hopital.

a. Calcule el siguiente límite sin la regla de L´Hopital: $\lim_{X \to 0} \dfrac{\sin x}{e^x}$

b. Use la regla de L´Hopital para calcular: $\lim_{X \to 0} \dfrac{\sin x}{e^x}$

c. ¿Qué diferencia hay entre los dos límites? ¿Por qué se da esta diferencia? Explique con sus palabras.

Como se ve, la regla de L´Hopital es muy útil con límites indeterminados, lo mejor es que se puede aplicar la regla las veces que sea necesaria, por tal razón es útil calcular derivadas de orden n (n-ésima derivada).

3. Calcular la n-ésima derivada de las siguientes funciones.

a. $f(x)=x^4$ para n= 3,5,10,1000

b. $f(x)= \sin(x)$ para n= 3,5,10,100

c. $f(x) = \cos(x)$ para n= 3,5,10,100

c. $f(x) = x^{10} - 3x^4 + 4x^2 - x + 1$ para n= 3,5,10,1000

Resumen

1. Resuelve la siguiente sopa de letras.

R	C	E	C	L	V	I	M	M	I	N	I	M	O	T
E	T	P	W	O	H	F	P	M	E	N	G	R	P	Q
W	M	R	K	X	H	O	W	D	Y	G	F	F	T	L
D	Q	G	Y	B	T	R	P	Y	F	Z	O	F	I	N
S	K	A	V	I	K	Y	C	I	F	P	N	A	M	O
V	P	O	S	I	C	I	O	N	T	K	M	C	I	I
E	Q	X	Z	A	U	S	E	N	W	A	X	I	Z	C
L	L	O	S	J	T	E	V	T	A	U	L	F	A	N
O	R	P	I	E	K	Q	X	P	I	Z	C	A	C	U
C	A	B	I	I	F	I	V	M	W	M	U	R	I	F
I	K	R	T	S	Q	F	H	K	A	B	I	G	O	L
D	O	L	A	V	R	E	T	N	I	X	E	L	N	P
A	C	E	L	E	R	A	C	I	O	N	I	N	T	U
D	H	C	A	M	B	I	O	X	G	G	L	M	I	M
Z	Q	D	E	R	I	V	A	D	A	A	V	H	O	O

- Aceleración
- Cambio
- Derivada
- Función
- Gráfica
- Intérvalo
- LHopital
- Límite
- Máximo
- Mínimo
- Optimización
- Posición
- Tasa
- Velocidad

Tarea

1. Dadas las siguientes funciones de posición, encontrar la velocidad y la aceleración.

a. $s(x)= -8x^3 + x$

b. $s(x)=-5x+2/x$

c. $s(x)= \dfrac{(x-1)}{(x+1)}$

d. $s(x)= x(x+2)^2$

e. $s(x)= \dfrac{x^2}{x-1}$

2. Se quiere cercar un lote rectangular de 800 metros cuadrados de área. Si uno de los lados está sobre la orilla de un río; ¿Cuáles son las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima?

3. **Halla los siguientes límites:**

a. $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

b. $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

c. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

4. Hallar la derivada n-ésima de las siguientes funciones.

a. $f(x) = e^x + 1$

b. $f(x) = \sin x - 3x$

c. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

d. $f(x) = \sqrt{x}$