Grado 11

Matematicas - Unidad 4

¿Cómo hallo el área de superficies curvas?

Bienvenidos al cálculo integral

Tema

Interpretación de la integral como área bajo la curva.

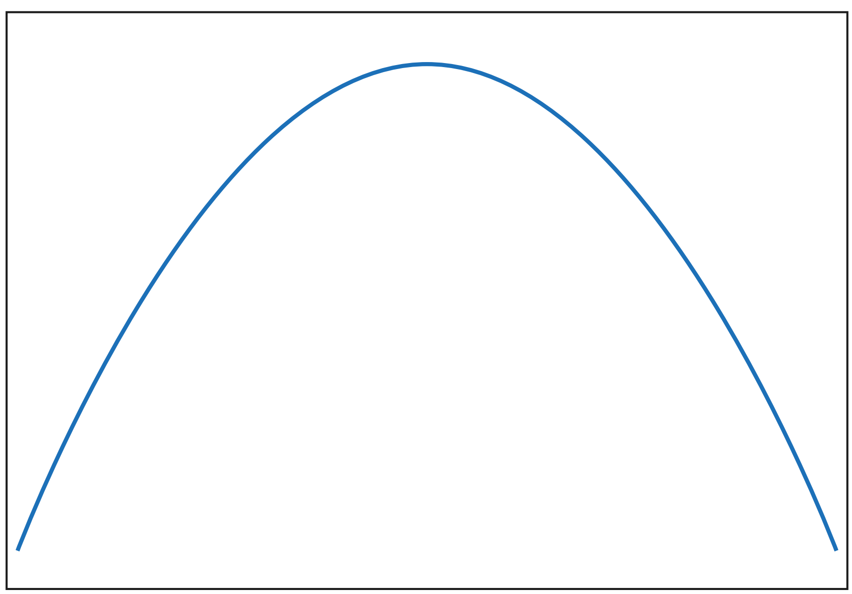
Nombre: ______________________ **Curso:** __________

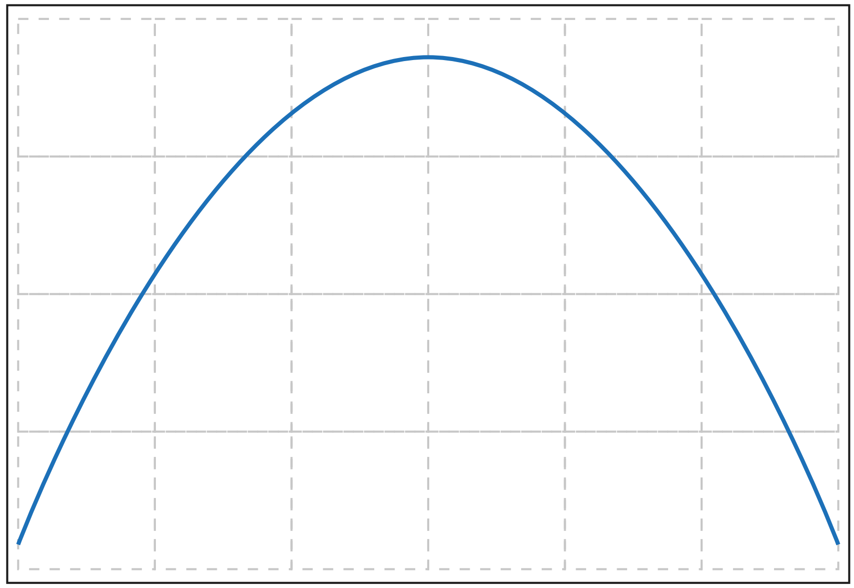
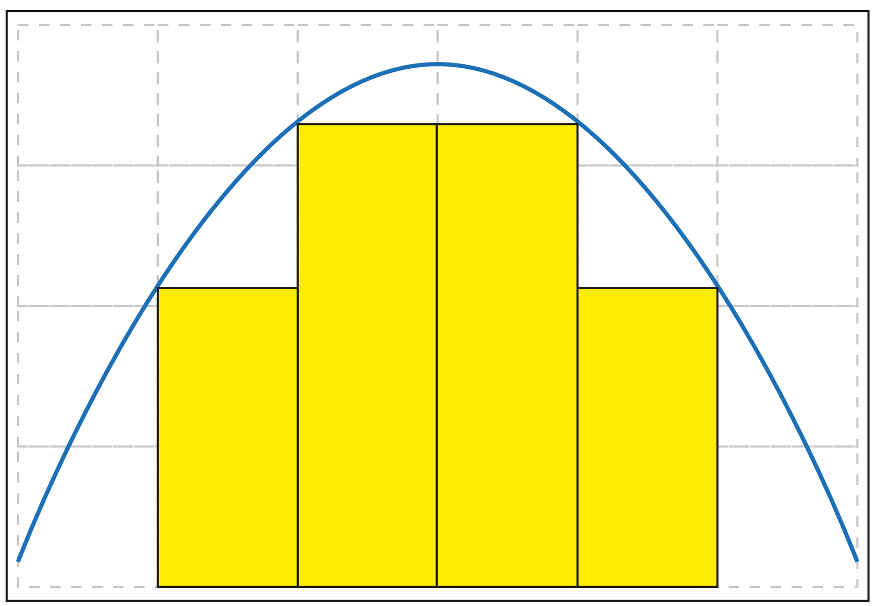
Introducción

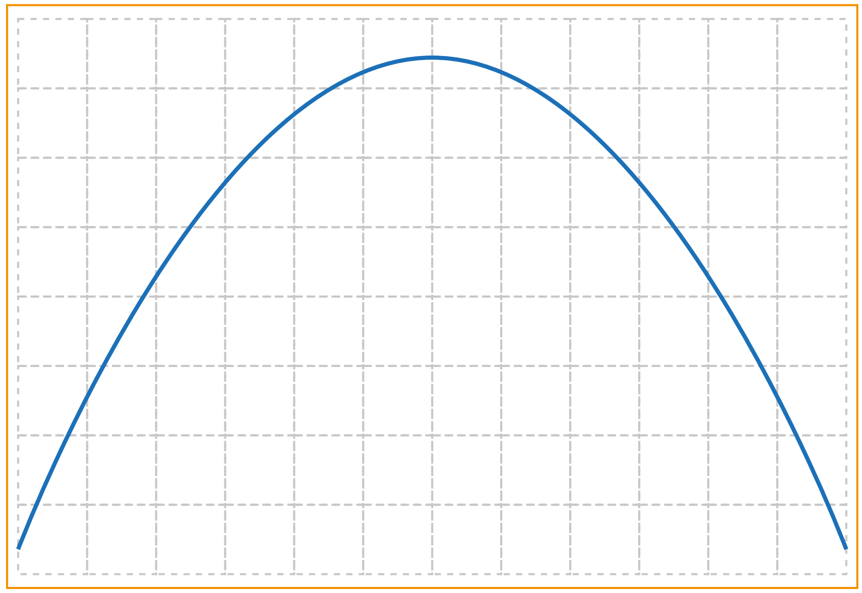
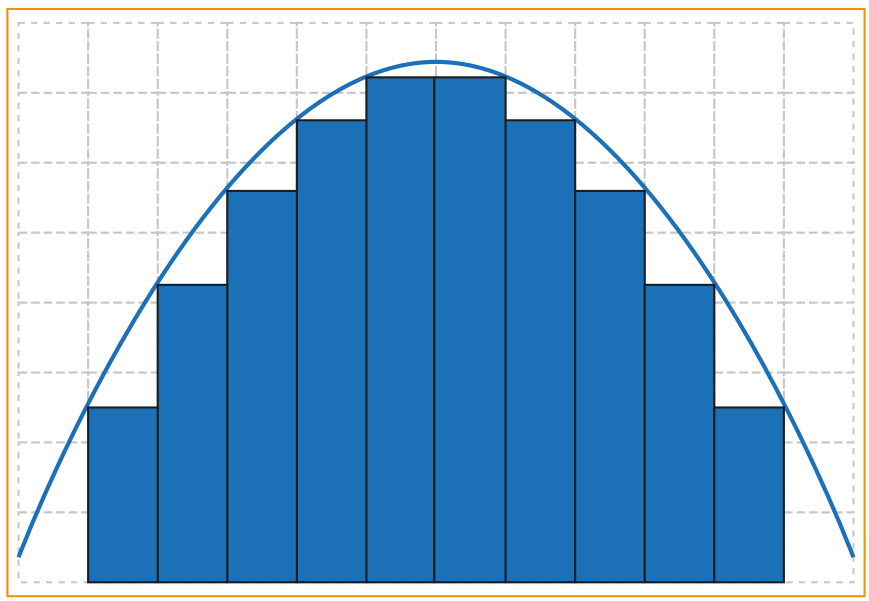
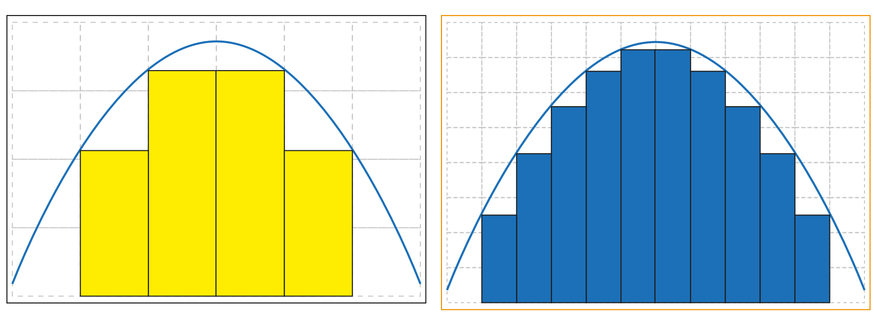
Conocer el área de distintas figuras ha sido posible a través de diferentes métodos a lo largo de la historia humana, en algunos casos basta con solo conocer las medidas de los objetos, en otros casos solo conocer la forma como se organizan, y en algunos casos es necesario descomponerlos en otros más pequeños y conocidos. El cálculo integral permite conocer a partir de la suma de pequeñas áreas un área mucho más grande de forma general, agilizando procesos y acortándolos por medio de expresiones generales.

Actividad Introductoria: Bienvenido al cálculo integral.

Observa el siguiente procedimiento:

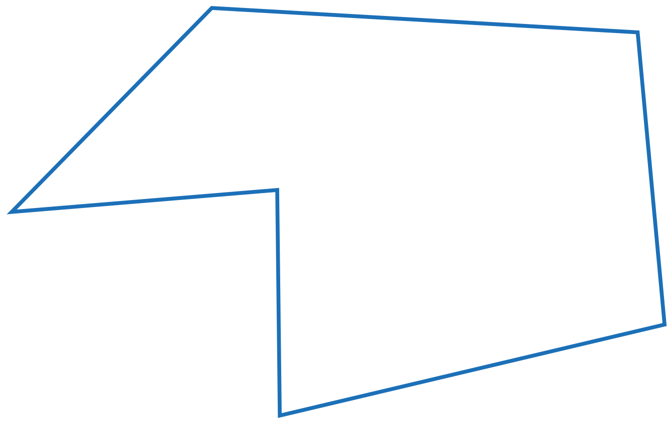
Instrucción	Imagen de referencia
1. Tomamos una curva cualquiera a la cual le queramos hallar el área bajo la curva.	

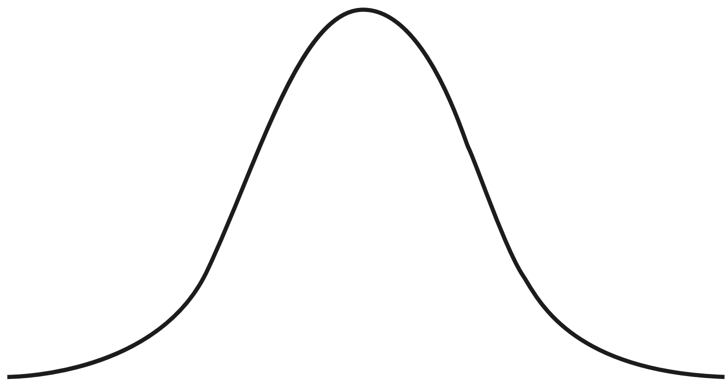
Instrucción	Imagen de referencia
2. Realizamos una división de la figura por medio de una cuadrícula que cubra toda la base de la curva.	
3. Colorea la cuadricula formando rectángulos que estén completamente dentro de la curva. Recuerda que deben tener al menos un vértice sobre la curva y no salirse de la misma.	

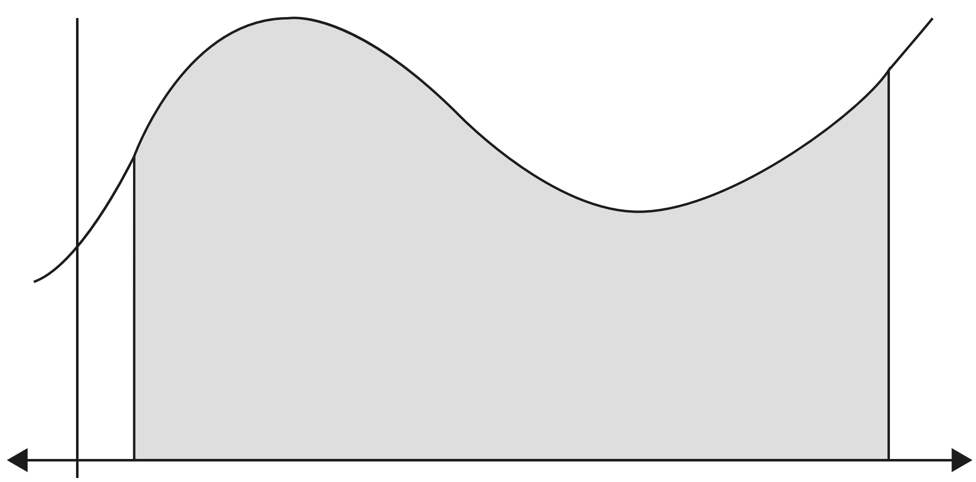
Instrucción	Imagen de referencia
4. A la misma curva, realiza otra división, esta vez con una cuadrícula de menor tamaño.	
5. Colorea la cuadricula formando rectángulos que estén completamente dentro de la curva. Recuerda que deben tener al menos un vértice sobre la curva y no salirse de la misma.	
6. Reflexiona acerca de qué sucede al comparar las dos imágenes que resultan de haber coloreado los rectángulos en ambas cuadriculas.	

A partir de la información anterior, realiza las siguientes consignas en compañía de uno de tus compañeros de clase. Luego, cuando tu docente te lo indique socializa las respuestas con el resto de clase.

1. Selecciona una de las imágenes presentadas.







2. Traza una cuadricula, lo más pequeña posible, sobre la imagen que seleccionaste.

3. Cuenta el número de cuadrados que están dentro de la imagen que seleccionaste.

4. A partir de tu conteo, realiza una aproximación al área de la forma seleccionada.

5. ¿Existe otro método, mediante el cual sea posible realizar una aproximación al área de la figura?

Si ¿Cuál?

No ¿Por qué?

5. ¿Es posible conocer o determinar el área exacta de la figura que seleccionaste?

Si ¿Cómo?

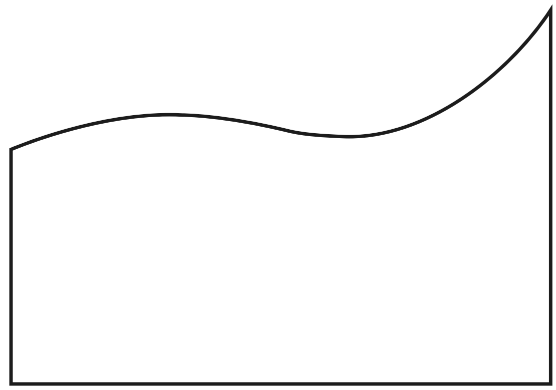
Objetivos

» Interpretar geométricamente la integral buscando áreas de superficies curvas.

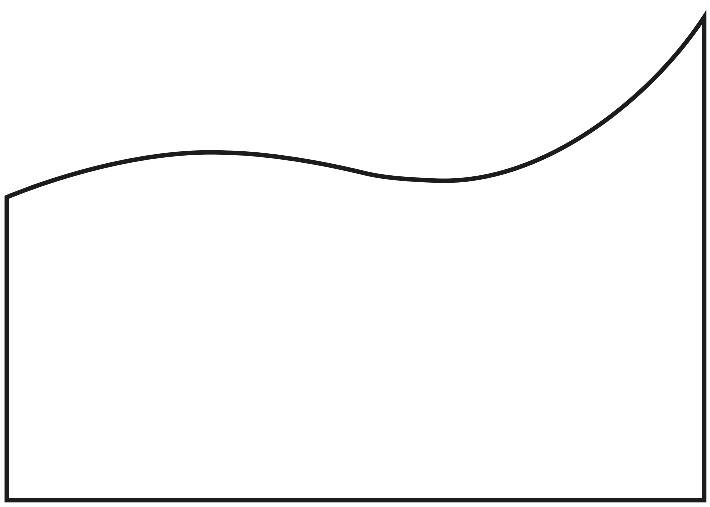
- Determinar el área de una figura a partir de aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos.
- Generalizar el proceso para hallar el área de una figura a partir de aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos.

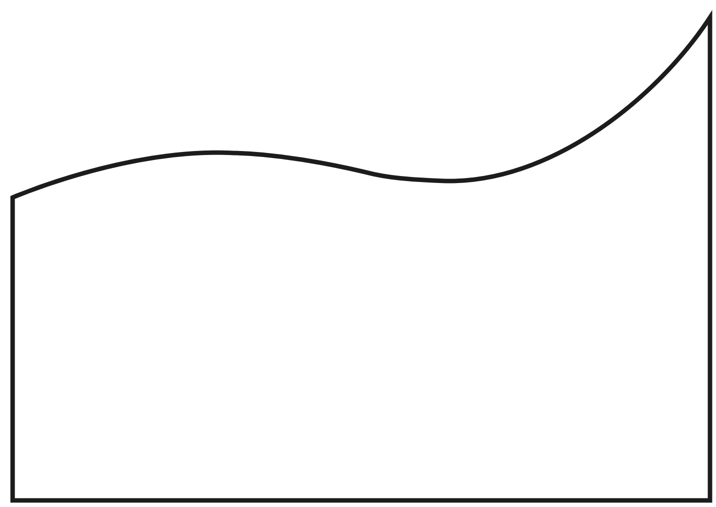
Actividad 1: Los rectángulos.

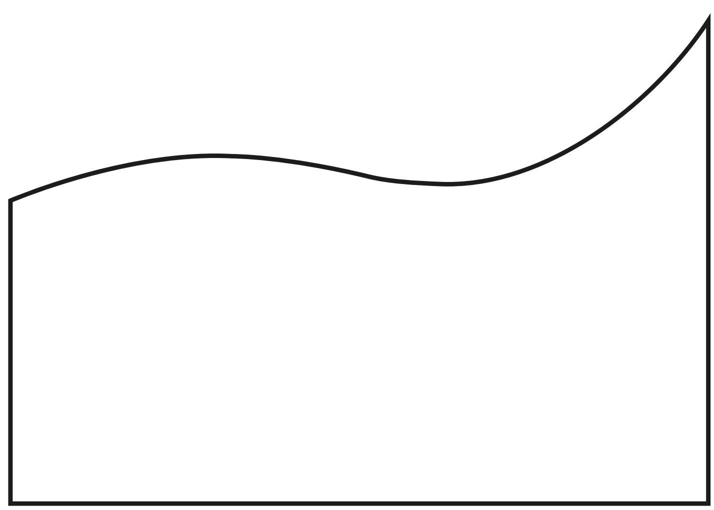
Reúnete con tres de tus compañeros, a partir de la siguiente imagen respondan las consignas y preguntas:



1. Cubre el área bajo la curva, haciendo uso de tres formas poligonales diferentes. Es decir cúbrela en tres ocasiones, cada una con una figura poligonal diferente.







2. Determina el área de cada una de las figuras poligonales que utilizaste para cubrir el área bajo la curva.

3. A partir de las áreas de las figuras poligonales que determinaste, realiza una aproximación al área total del área bajo la curva.

Con tu grupo de tres compañeros, da respuesta a las siguientes preguntas y consignas, apóyate en lo trabajado anteriormente

1. ¿Es posible cubrir totalmente el área bajo la curva con cualquier forma poligonal?

2. ¿Es pertinente y adecuado, cubrir el área bajo la curva con cualquier forma poligonal, cuando se tiene la intencionalidad de determinar el área de esta?

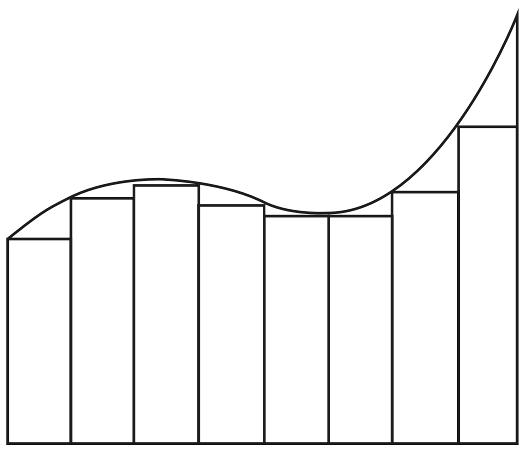
3. ¿El tamaño de las figuras poligonales, que se utilizan para cubrir el área bajo la curva, tiene alguna incidencia, cuando lo que se quiere es determinar el área de esta?

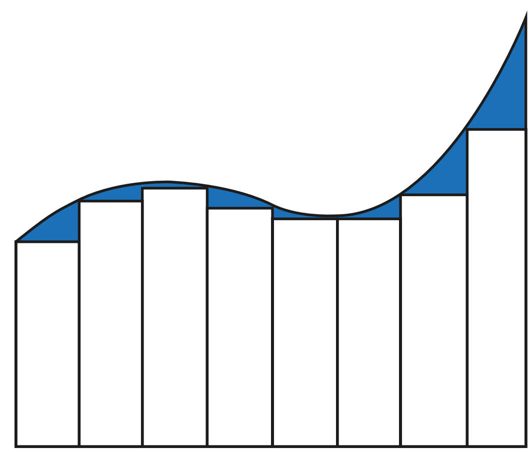
Para tu información:

Ahora bien, el cubrimiento del área bajo la curva de la figura que se presenta por medio de la utilización de rectángulos se puede presentar de acuerdo a dos criterios:

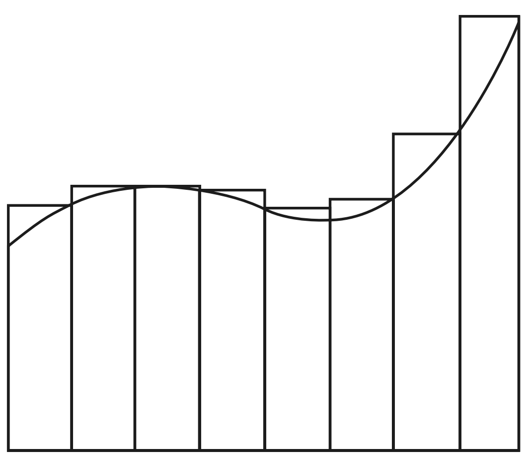
El cubrimiento por defecto: consiste en superponer rectángulos de igual tamaño de ancho bajo la curva permite tener una idea del área que se cubre, pero este caso permite que haya espacios que no se cubren debido a la forma misma de los rectángulos.

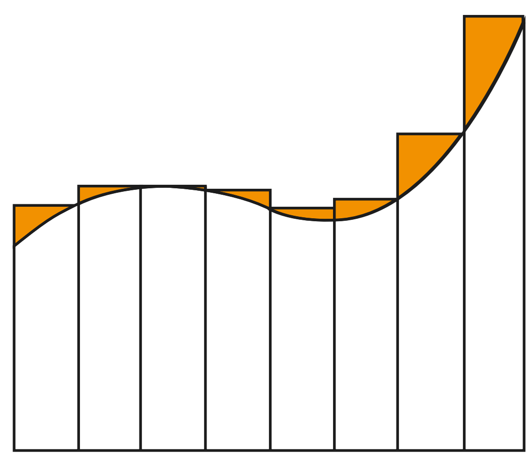
Por lo que se hace necesario reformular el procedimiento, para que haya una mejor aproximación al área exacta bajo la curva.





De forma similar al cubrimiento por defecto existe el cubrimiento por exceso, el cual consiste en superponer rectángulos de igual tamaño de ancho sobre la curva permite tener una idea del área que se cubre, pero este caso permite que haya espacios que sobran debido a la forma misma de los rectángulos.
Por lo que se hace necesario reformular el procedimiento para que se disminuya este cubrimiento extra, pues se desarrolla por exceso y es necesario que sea lo más cercana al área bajo la curva.

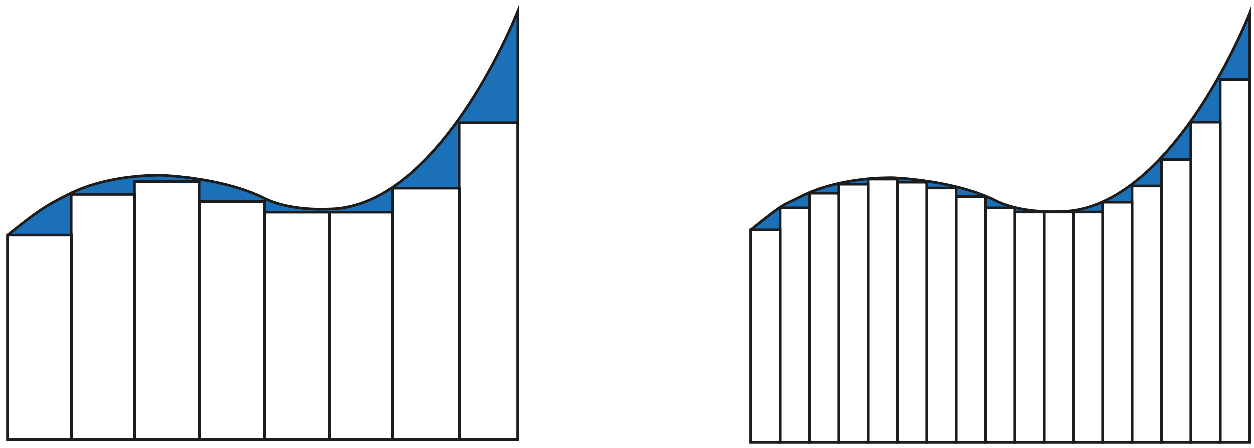




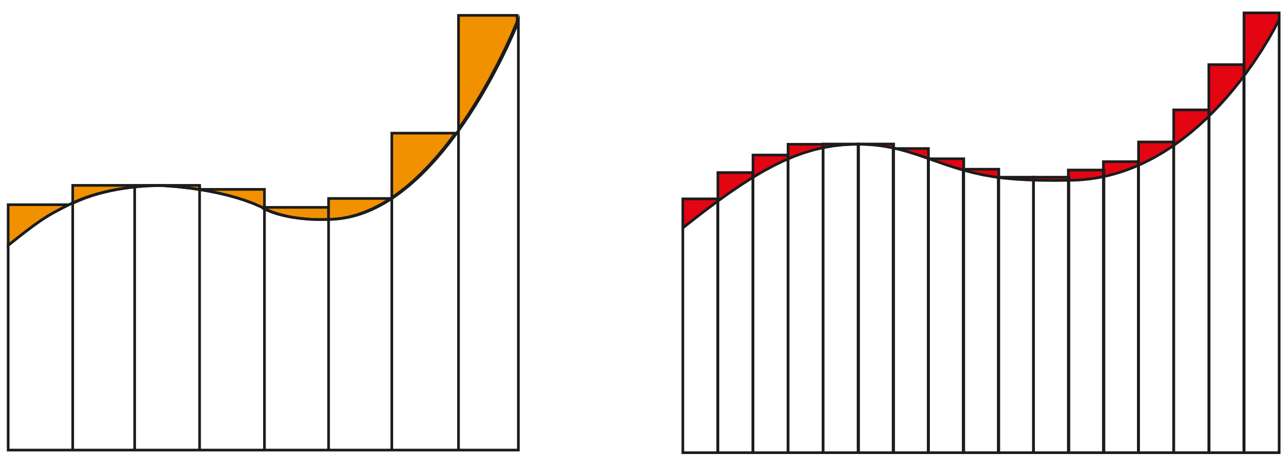
Para tener una mejor aproximación al área bajo la curva se hace necesario cambiar el ancho de los rectángulos en tanto que cubre más o menos área bajo la curva y esto permite tener un valor estimado más preciso.

Comparemos los acercamientos con dos configuraciones de rectángulos:

Cubrimiento por defecto del área bajo la curva

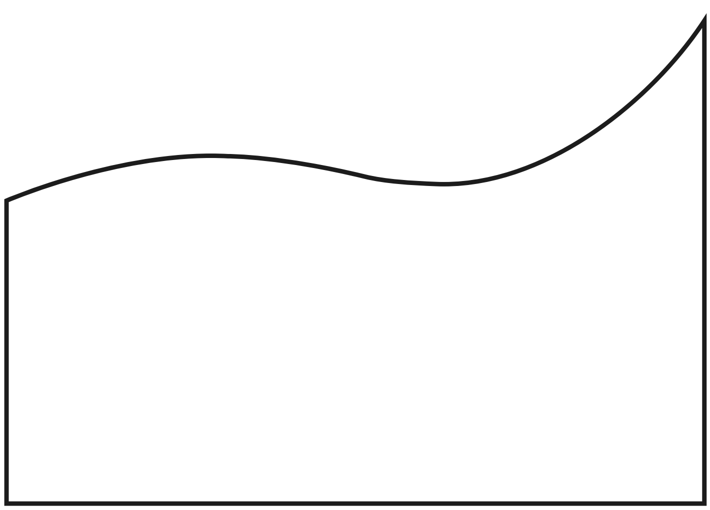


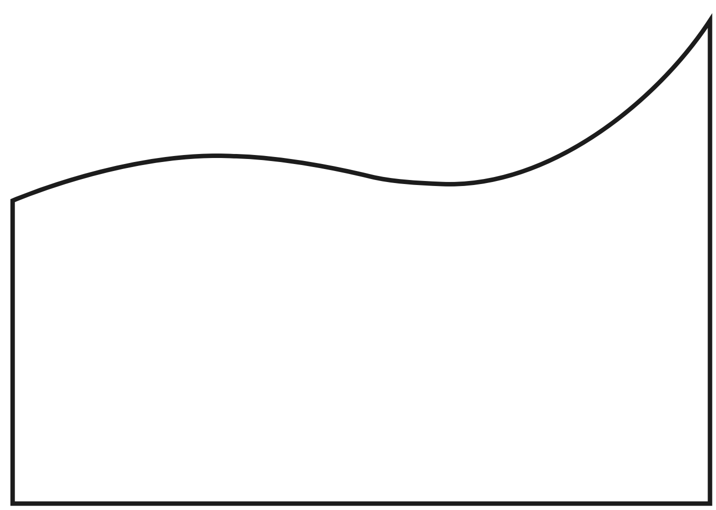
Cubrimiento por exceso del área bajo la curva



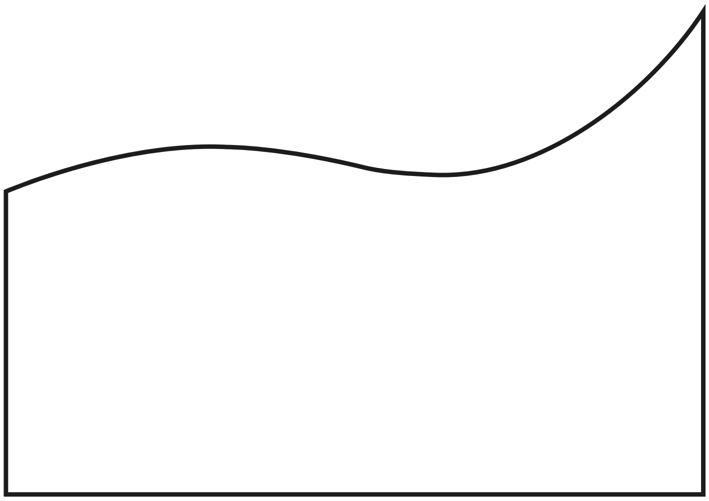
Con base en lo visto hasta este momento, resuelve las siguientes consignas:

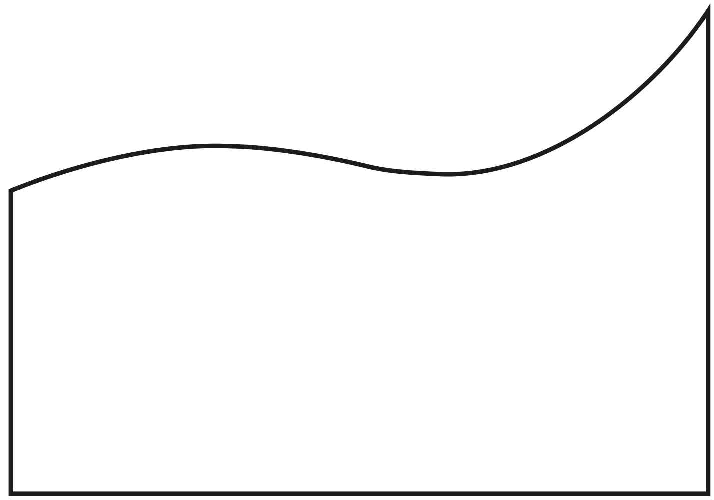
1. Cubre el área bajo la curva haciendo uso de rectángulos que no sobrepasen la altura máxima de esta en ningún punto. Plantea dos propuestas por defecto.





2. Cubre el área bajo la curva haciendo uso de rectángulos que sobrepasen la altura máxima de esta en algunos puntos. Plantea dos propuestas por exceso.





3. Determina el área de cada uno de los rectángulos para los casos por exceso y defecto.

4. A partir del área de los rectángulos, determina el área bajo la curva.

De acuerdo con lo visto hasta el momento de forma individual, resuelve las siguientes consignas con respecto a la imagen que observas.

1. Determina el área aproximada de la superficie por defecto y por exceso.

2. Determina el área aproximada de cada uno de los colores.

3. ¿Qué sucede si disminuimos el ancho de todos los rectángulos a la mitad?

De acuerdo con lo visto hasta el momento de forma individual, resuelve las siguientes preguntas con respecto a la imagen vista anteriormente.

1. ¿Si tus compañeros toman el ancho del rectángulo más amplio o de menor tamaño que el tuyo, que sucede en relación al área que se debe determinar?

2. ¿Qué sucede, si se toma el ancho del rectángulo lo más pequeño posible?

3. ¿Qué puedes decir del proceso que se realiza para hallar el área aproximada bajo la curva?

4. ¿Es posible describir de forma detallada, el proceso que se sigue para determinar el área aproximada bajo la curva?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

5. ¿Es posible identificar mediante una expresión algebraica el proceso utilizado para determinar el área aproximada bajo la curva?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

Para tu información:

El área total bajo la curva estará dada entonces por el área de todos los rectángulos que cubren la parte inferior a la curva.

Por lo que es necesario sumar todas las pequeñas áreas para tener un acercamiento al área total. Lo cual se expresa de la siguiente manera:

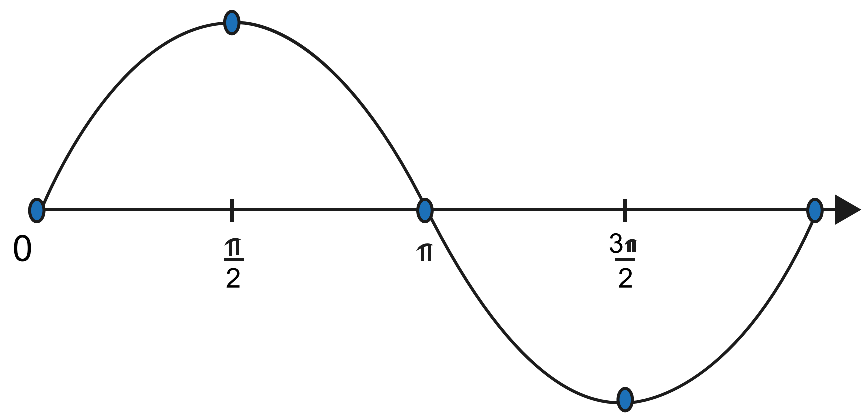
$$\text{Área total bajo curva} = dx \cdot h_1 + dx \cdot h_2 + dx \cdot h_3 + \dots + dx \cdot h_n$$

O se puede observar de forma general como:

$$\text{Área total bajo curva} = \sum_{n=1}^{k} dx \cdot h_n$$

Actividad 2: En el plano cartesiano.

Observa la siguiente figura, responde de manera individual las preguntas y luego socializaremos algunas de las posibles respuestas.



1. ¿Sabes a qué corresponde esta representación?

2. ¿Es posible hallar el área de esta representación por aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

3. ¿Es posible expresar, por medio de variables, las medidas de los rectángulos que descomponen la figura?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

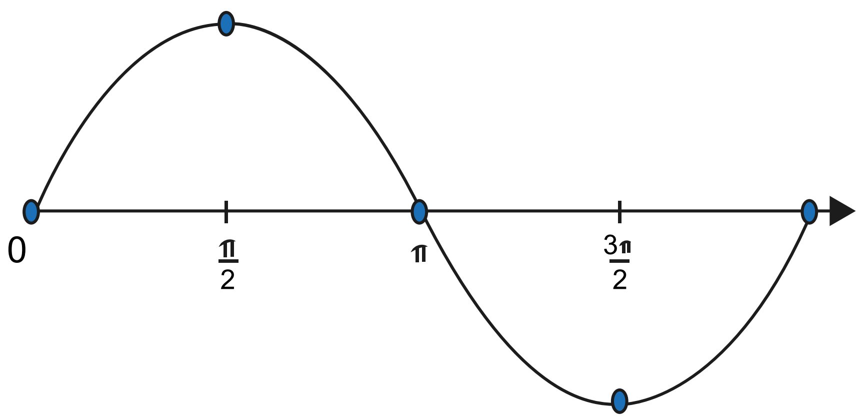
Con base en las respuestas anteriores, reúnete con dos de tus compañeros y resuelve las siguientes consignas.

1. Socialicen las respuestas dadas a cada una de las preguntas abordadas.
2. Establezcan acuerdos en relación a las respuestas correctas.

3. Nombren un líder que socialice los acuerdos establecidos.

Nombre del líder: ______________________________

Revisa las preguntas y su respectiva respuesta:



1. ¿Sabes a qué corresponde esta representación?

R/ La representación corresponde a la gráfica de la función seno y gracias a las particularidades de esta, se tiene igualdad en relación a las dos curvas trazadas.

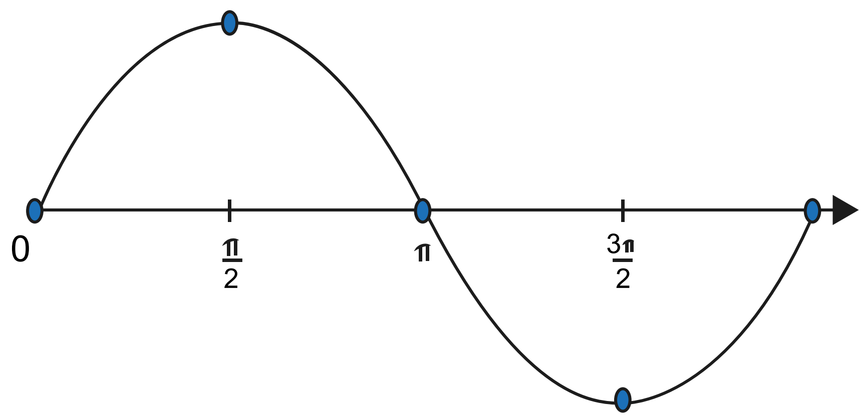
2. ¿Es posible hallar el área de esta representación por aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos?

R/ La base de los rectángulos, en los que se descompone la figura, puede o no ser igual para todos y siempre se tendrá variabilidad en relación al largo de estos para que se complete la mayor cantidad de espacio posible.

3. ¿Es posible expresar, por medio de variables, las medidas de los rectángulos que descomponen la figura?

R/ Los rectángulos utilizados, pueden completar la figura por defecto o por exceso y en los dos casos se podrá determinar el área aproximada bajo la curva. En este punto, es necesario que el docente, apoyado en el recurso y contando con la participación de los líderes de cada uno de los grupos, verifique esta situación y observar la cercanía que se puede tener en estos valores.

Aún con tu grupo de compañeros del trabajo anterior, da respuesta a las siguientes consignas:



1. Ubica la figura en el plano cartesiano.

2. Generaliza las bases de los rectángulos como valores en el eje x.

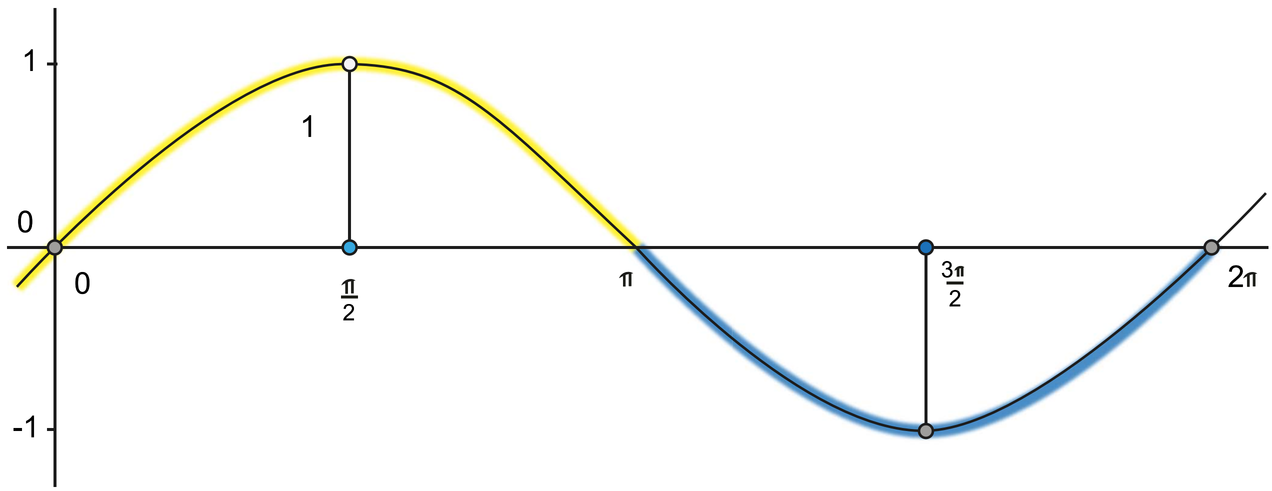
3. Determina la imagen de los rectángulos en el eje y. Recuerda tener presentes las características de la función seno, la cual genera la curva.

4. Determina el intervalo, que define la base de la figura.

5. Expresa, por medio de una sucesión, la medida de las bases de los rectángulos que descomponen la figura.

Con base en lo visto hasta el momento, y las respuestas anteriores; observa la siguiente información:

La función seno presenta unas particularidades que es necesario conocer. entre ellas se encuentra su dominio y rango, la igualdad existente en la curva que se traza de 0 a π y de π a 2π, al igual que la distancia desde 0 a 1 y desde 0 a -1.



De acuerdo a lo trabajado en clase y a la información anterior. De manera individual, responde la siguiente pregunta, luego socializaremos algunas respuestas:

1. ¿Es posible hallar el área de esta representación por aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

2. Teniendo en cuenta que para medir áreas bajo la curva se pueden usar polígonos como el rectángulo, ¿Qué otro polígono se podría usar para hallar el área bajo la curva sin que se altere la forma como la has trabajado hasta el momento?

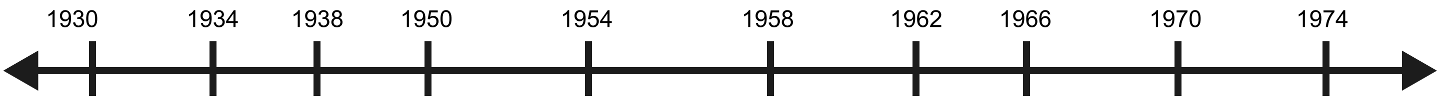
Actividad 3: Riemann.

Reúnete con los dos compañeros con los que trabajaste en la actividad 2, con ellos y apoyándote en las consultas en libros, documentos e internet; responde las siguientes consignas:

1. Consulta, en relación a la forma en la que se dio el desarrollo histórico, qué permite hallar el área de figuras, descomponiéndolas en rectángulos.

2. Indaga en relación a los aportes de Riemann al desarrollo del Cálculo Integral.

3. Elabora una línea histórica, en la que ubiques los personajes que realizaron contribuciones al desarrollo del cálculo integral, enfatizando en aquellos que trabajaron en la descomposición del área de la figura en rectángulos. En dicha línea, es necesario que describas brevemente el aporte del personaje.



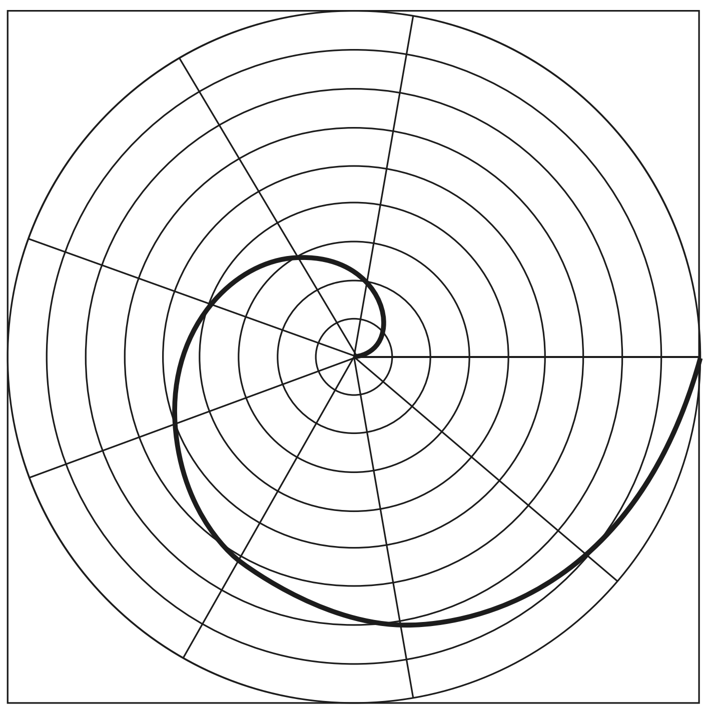
Observa con atención el siguiente ejemplo de cuadratura, el cual sigue el mismo procedimiento de la integral de Riemann.

Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

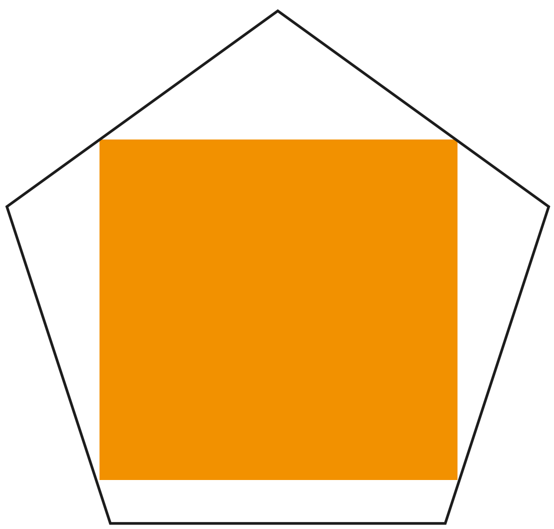
La espiral de Arquímedes, es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas curvas mecánicas. La ecuación polar, de una espiral de Arquímedes es de la forma $p=a$, donde $a > 0$ es una constante.

Teorema: el área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.



Recuerda:

El área es una de las magnitudes que se miden de una superficie.
El tipo de región más simple, que se puede considerar es un rectángulo, cuya área se define como el producto de su base por su altura. A partir de esta definición, se pueden obtener las fórmulas para el área de regiones más complicadas: triángulos, paralelogramos, polígonos regulares, etc.

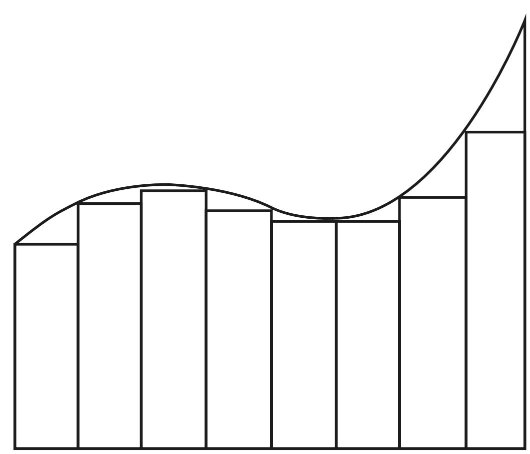


Los primeros matemáticos que intentaron resolver el problema de una forma seria fueron los griegos, utilizando el método de **“Exhaución”.**

Este método, atribuido a Arquímedes, consiste en encajar la región entre dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito. Si la diferencia entre las áreas de los dos polígonos es pequeña, entonces se puede aproximar el área de la región por cualquier número comprendido entre el área del polígono inscrito y el área del polígono circunscrito.

Integral de Riemann

Es parecido en algunos aspectos, al método de exhaución. Se trata de aproximar la región por una unión de rectángulos de tal forma que el área de la región se aproxime por la suma de las áreas de los rectángulos.



Ahora bien, es necesario tener unas consideraciones con respecto al método de aproximación al área bajo la curva por medio de suma de área de rectángulos.

- Es necesario definir la integral de la función f en un intervalo cerrado [a, b].
- a y b son los límites inferior y superior de la integración respectivamente.

- No todas las funciones son integrables, sin embargo la familia de funciones integrables en un intervalo es muy grande "Toda función continua en un intervalo cerrado [a, b] es integrable en dicho intervalo".
- Si f es continua y no negativa en un intervalo cerrado [a; b], entonces el área de la región limitada por f, el eje x y las líneas verticales x = a y x = b viene dada por:

$$Área=\int_a^b f(x)\,dx$$

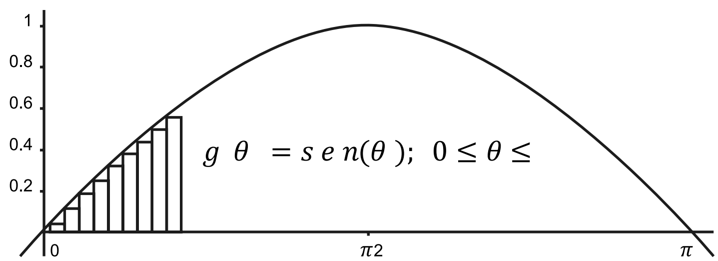
Responde de manera individual la siguiente pregunta:

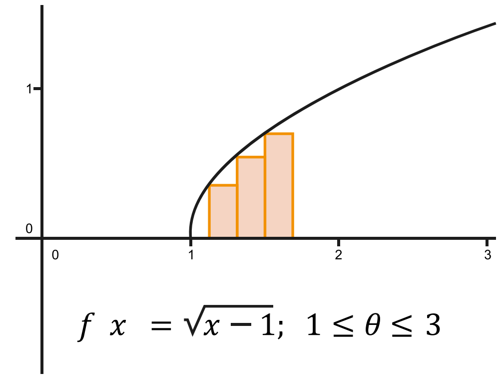
- ¿Es posible, que al ubicar en el plano cartesiano una figura, y ésta pueda interpretarse como una función?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

Observa las siguientes imágenes y relaciona las condiciones mostradas con tu respuesta a la anterior pregunta. Después y aún en compañía de tus dos compañeros responde las preguntas.





1. Determina si son o no integrables por medio del método desarrollado por Riemann las siguientes funciones, justifica tu respuesta.

a.

- $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$
- $-4 \leq x \leq 0$

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

b.

- $m'(x) = 3x^2 + x - 5$
- $x \in R$

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

c.

- $g''(x) = 2sen(x) + x$
- $-2\pi \leq x \leq 0$

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

d.

- $n'(x) = \cos(x^2)$
- $-\pi \leq x \leq 0$

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

e.

- $h(x) = 2e^{-3x^2}$
- $0 \leq x \leq 2$

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

2. ¿Cuáles conocimientos previos, puedes utilizar para la determinación del área de figuras con superficies curvas? Justifica tu respuesta.

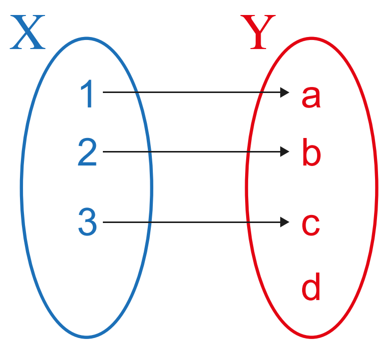
3. ¿Es posible, mediante la aplicación del límite, realizar aproximaciones al área de las figuras con descomposición en rectángulos?

Si ¿Cómo?

No ¿Por qué?

Para recordar:

Una función es una relación biunívoca entre los elementos de dos conjuntos, llamados dominio y rango.



El límite de una función es el número al cual están próximos los valores evaluados en el dominio, su obtención constituye una operación dependiente del valor de epsilon elegido.

$$\lim_{x \to 2} m'(x) = 3x^2 + x - 5 = 9$$

La derivada es la razón de cambio con respecto a una variable en una función.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + (x+h) - 5 - (3x^2 + x - 5)}{h}$$

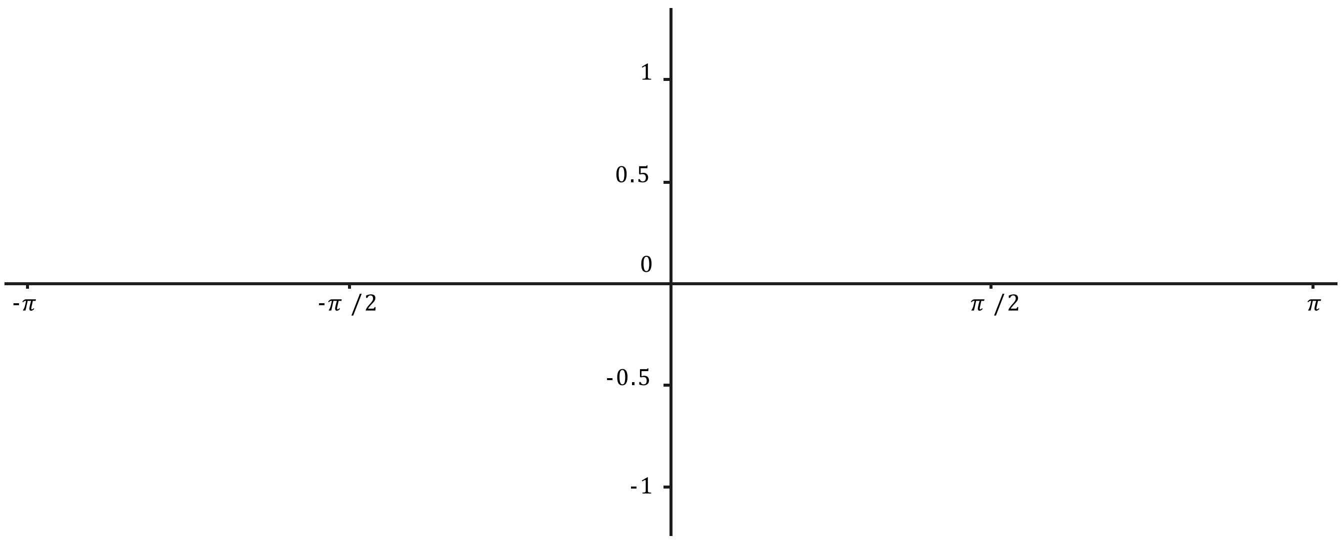
$$= 6x + 1$$

La integral es una generalización de la obtención del área bajo una curva por medio de la suma de áreas indifinitesimales para una función dada, por lo que podríamos verlo como:

$$Área = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x) * \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Con base en lo visto en la clase, y con el grupo de compañeros de actividades anteriores; realiza las siguientes consignas. Luego cuando tu docente te lo indique comparte con el grupo de clase tus respuestas.

1. Traza la curva correspondiente a la función coseno en el plano cartesiano.



2. Realiza la descomposición de la figura en rectángulos.
3. Identifica en el plano cartesiano un intervalo que defina la base de la figura.
4. Halla el área de la figura por medio de aproximaciones sucesivas de sumas de áreas de rectángulos.

5. Expresa por medio de variables, las medidas de los rectángulos que descomponen la figura.

Tarea

Con base en lo trabajado en la clase y las diferentes actividades realiza las siguientes consignas de manera individual.

1. Indaga en relación a las limitaciones que pueda tener el método desarrollado por Riemann para la determinación de áreas.

2. Consulta algunas aplicaciones de gran trascendencia que haya tenido el método desarrollado por Riemann.

3. Indaga en relación a la existencia de otros métodos que permitan la determinación del área de figuras curvas.

4. Elabora una tabla comparativa entre dos métodos que permitan determina el área de figuras curvas, resaltando las ventajas o desventajas que puedan tener estos.

Método de obtención de áreas	Ventajas	Desventajas