Grado 11

Matemáticas - Unidad 4

¿Cómo hallo el área de superficies curvas? Bienvenidos al cálculo integral

Tema

Identificación del método de integración por partes

Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)	**Grado 11:** **UoL_4:** ¿Cómo hallo el área de superficies curvas? Bienvenidos al cálculo integral. **LO_3:** Interpretación de la integral como antiderivada. **Grado 11:** **UoL_4:** ¿Cómo hallo el área de superficies curvas? Bienvenidos al cálculo integral. **LO_5:** Identificación del método de integración por sustitución.
Objetivos de aprendizaje	• Hacer uso de algunas estrategias aplicadas en el método de integración por partes para determinar la integral de una función. • Identificar el método de integración por partes como estrategia para integrar funciones compuestas.
Habilidad / Conocimiento (H/C)	**SCO 1: Aplica el método de integración por partes para hallar la integral de una función.** 1. Reconoce funciones donde no es posible llegar a su integral por medio de su antiderivada. 2. Reconoce una expresión que le permite identificar la integral utilizando el método de integración por partes. 3. Asocia la fórmula de integración por partes con frases de su vida cotidiana que permiten recordarla. 4. Reconoce estrategias para identificar cada término del integrando asociado a los términos de la fórmula de integración por partes. 5. Realiza reemplazos del integrando a la fórmula de integración por partes y halla la antiderivada para llegar a la solución de la integral. 6. Establece la relación entre el método de integración por partes con la diferenciación de un producto.
Flujo de aprendizaje	**Introducción→Objetivos→Desarrollo→Resumen→Tarea** **1. Introducción:** ¿Cómo se integra? (H/C 1) **2. Objetivos de aprendizaje** **3. Desarrollo:** **3.1. Actividad 1:** ¿Cómo integro esta función? (H/C 1, H/C 2, H/C 6) **3.2. Actividad 2:** Formulando y reconociendo (H/C 3, H/C 4, H/C 5) **4. Resumen:** Estableciendo conclusiones **5. Tarea**

Lineamientos evaluativos	Los estudiantes a través de las diferentes actividades propuestas, estarán en capacidad de identificar cuando una función no se puede integrar por medio de su antiderivada, además de reconocer cuando el método de integración por partes permite hallar la integral de determinadas funciones

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Introducción	**Introducción**	**¿Cómo se integra? (H/C 1)** El docente presenta el video propuesto, en el que se hace alusión a la integración, pero no desde el punto de vista estrictamente matemático, sino desde situaciones cotidianas. En relación a este, el docente plantea los siguientes cuestionamientos, para ser abordados individualmente en el Material del Estudiante: 1. ¿Qué es integrar? 2. ¿Qué se debe tener presente, para lograr un proceso de integración? 3. ¿Qué relación se puede establecer entre la integración en la vida cotidiana y la integración en matemáticas? El docente debe socializar las respuestas de algunos de sus estudiantes y establecer acuerdos con el grupo en general, en relación a lo que es integrar.	**Video:** Se presentan algunos casos, en los que sea necesario integrar algunas personas o cosas con el fin de alcanzar un objetivo. Por ejemplo se tiene el caso, de lograr la integración de un grupo de personas para consolidar un equipo de trabajo, como lo es un equipo de fútbol. Se debe enfatizar en que la integración no siempre es inmediata, que en ocasiones se hace por partes y que es posible que se deban hacer ajustes o modificaciones en esas partes, para conseguir algo. En este fragmento se puede hacer alusión a la forma en que se integran elementos como tornillos, tuercas, láminas, entre otros, para conseguir poco a poco electrodomésticos o vehículos.
		Posteriormente, apoyado en el recurso, en el cual se tiene información en relación a los métodos de integración que el estudiante debe haber visto hasta el momento, el docente debe hacer un pequeño recuento del concepto de antiderivada de una función, además del hecho que al integrar una función $f(x)$, se obtiene una función $F(x)+c$, que cumple la condición $(F(x)+c)'=f(x)$; consecutivamente, también se realizará un recuento en relación al método de integración por sustitución.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Terminado este recuento, en el cual se debe tener en cuenta la participación de los estudiantes, el docente propone abordar el siguientes cuestionamiento en el **Material del Estudiante**: • ¿Existen funciones, que no se pueden integrar por medio de los métodos recordados? El docente, contando con la participación de los estudiantes, debe establecer que el método de sustitución no es aplicable a todas las funciones, además, que existen funciones donde su antiderivada no es conocida.	
Objetivos		**Objetivos de aprendizaje** El docente, en compañía de los estudiantes, escribe los objetivos a los que creen que se debe llegar. Luego, el docente presenta los objetivos propuestos para este objeto de aprendizaje; además puede explicar los objetivos si lo cree necesario y/o conveniente.	
Contenido	El docente presenta el tema	**Actividad 1: ¿Cómo integro esta función? (H/C 1, H/C 2, H/C 6)** El docente, apoyado en el recurso, presenta la siguiente actividad, la cual va ser desarrollada por parte de los estudiantes de manera individual en el Material del Estudiante. A los estudiantes, el docente les presenta la función $h(x)=xe^x$ y propone la siguiente pregunta: • ¿Cuál es la antiderivada de $f(x)$? Después de dar un tiempo prudencial para abordar el cuestionamiento planteado, es necesario que los estudiantes junto con el docente reconozcan que la antiderivada no se puede hallar y que se hagan explícitos, por parte de algunos	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		estudiantes, las razones que justifican lo expresado. A continuación, el docente les propone a los estudiantes abordar la siguiente consigna: • Hallar la derivada de $h(x)$ Esperando que los estudiantes concluyan que la derivada de la función h se expresa de la forma: $h'(x) = e^x + xe^x$ Por consiguiente, es necesario que el docente les indica a los estudiantes despejar xe^x, de donde los estudiantes obtienen: $xe^x = h'(x) - e^x$ **1.1** Ahora, el docente reitera el hecho que al integrar una función $f(x)$, se obtiene una función $F(x) + c$, donde $c \in \mathbb{R}$ tal que al derivarse resulta la función inicial $f(x)$, es decir, si $\int f(x)dx = F(x) + c$, entonces $(F(x) + c)' = f(x)$; de esta manera los estudiantes deben recordar que la diferenciación y la integración son procesos inversos. A continuación, el docente les pregunta a los estudiantes: • Teniendo en cuenta la expresión **1.1**, ¿Es posible hallar la integral de $h(x) = xe^x$? SI ¿Cómo? No ¿Por qué? Los estudiantes deben afirmar que al integrar **1.1** se obtiene una expresión para hallar la integral en cuestión.	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Seguidamente, el docente les pide a los estudiantes: • Halla la integral de 1.1 Los estudiantes deben llegar a las expresiones: $\int x\, e^x\, dx = \int h'(x) - \int e^x\, dx$ $\int x\, e^x\, dx = h(x) + c - \int e^x\, dx$ Donde c es una constante perteneciente a $\mathbb{R}$. Por consiguiente, los estudiantes deben establecer que $\int xe^x\, dx$ se puede hallar utilizando la ecuación anterior, de ahí que la integral pedida se exprese de la forma: $\int xe^x\, dx = h(x) - \int e^x\, dx + c$ Es decir que: $\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx + c$ Por lo tanto: $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + c$	
		A continuación, el docente les pide a los estudiantes: • Considerando la función $h(x) = f(x)g'(x)$ calcular su integral por medio de la derivada del producto $f(x)g(x)$ Esperando que los estudiantes determinen que: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx + c$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		A partir de lo anterior, los estudiantes podrán ir estableciendo que por medio de la derivada de una función resulta una fórmula para hallar una integral de una función de la forma $f(x)\, g'(x)$. De este modo, el docente puede ir concluyendo, junto con sus estudiantes, que la fórmula anterior se denomina Integración por partes, y poniendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se tiene $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$ y se obtiene la fórmula: $$\int udv = uv - \int vdu + c$$ Donde c es una constante perteneciente a $\mathbb{R}$.	
		Actividad 2: Formulando y reconociendo (H/C 3, H/C 4, H/C 5) El docente, propone la función $f(x) = lnx$, y solicita a los estudiantes dar respuesta a la siguiente consigna en el Material del Estudiante de forma individual: • Halla $\int lnx\, dx$ Para hacer uso de la fórmula de integración por partes los estudiantes tienen que identificar u y v por consiguiente, los estudiantes junto con el docente deberán establecer que: • Se deriva u para encontrar du. • dv es el factor más complicado que se puede integrar facilmete. • La antiderivada $v = \int dv$ debe ser fácil de determinar. • La nueva integral $\int v\, du$ debe ser más fácil de calcular que la integral original $\int udv$ Teniendo en cuenta lo anterior, los estudiantes deben llegar a que $u = lnx$ y $dv = dx$, porque du se puede calcular y como no hay más términos para dv, se tiene que $dv = dx$, de ahí que $du = 1/x\, dx$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		y $v = x$. Reemplazando en la fórmula de integración por partes se obtiene que: $$\int In(x) = xlnx - \int dx = xlnx - x + c$$ Ahora, para comprobar que la $\int lnx\, dx$ es correcta, el docente les solicita a los estudiantes derivar la antiderivada hallada anteriormente, de esta manera los estudiantes obtiene que $(xlnx - x + c)'=lnx$, es decir que la antiderivada hallada es correcta. Teniendo en cuenta la utilidad de la fórmula de integración por partes, el docente debe insistir a sus estudiantes en la importancia de recordarla correctamente, por consiguiente propone la siguiente consigna: • Haciendo uso de las letras que tiene la fórmula que permite la integración por partes, inventa una frase que sea fácil de recordar para ti. (U,D,V,U,V,V,D,U) Puedes integrar otras palabras que den sentido a tu frase. $$\int udv = uv - \int vdu + c$$ El docente, debe reiterar que la fórmula se construye a partir de la derivada de un producto de dos funciones. Después de dar un tiempo prudencial, para que los estudiantes intenten formar la frase, el docente presenta las siguientes: "**U**n **d**ía **v**i, **u**n **v**aliente soldado, **v**estido **d**e **u**niforme" "**U**n **d**ía **v**i, **u**na **v**aca, **v**estida **d**e **u**niforme" A continuación, el docente explica que la anterior frase hace referencia a las letras que conforman la fórmula de integración por partes, teniendo en cuenta la primera	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		letra de cada palabra (las palabras resaltas en la frase).	
		Para finalizar esta consigna, el docente propone a los estudiantes socializar las frases que hayan construido, resaltando las que sean más claras o más graciosas y propone esta última consigna: • Consulta en la web o en textos, si existen otras frases que sean de gran difusión y hagan alusión a la fórmula de integración por partes.	
Resumen	**Resumen**	**Actividad: Estableciendo Conclusiones** El docente, apoyado en el recurso, propone a los estudiantes las siguientes consignas y preguntas, las cuales se realizarán en grupos de cuatro estudiantes y se encuentran en el Material del Estudiante: • ¿Cómo se determina, si una función es integrable por el método de integración por partes? • ¿Cuáles consideras que son los criterios para escoger *u* y *v*? • Escoge cinco palabras claves respecto al tema trabajado y con ellas realiza un resumen referente a la integración por partes en el **Material del Estudiante**. Las respuestas de las dos primeras preguntas se socializarán escogiendo de cada grupo un representante. Siendo necesario que el docente realice las aclaraciones o correcciones que considere pertinentes. Posteriormente y apoyado en el recurso, el docente propone cinco ejercicios, para que los estudiantes, haciendo uso de la formula, realicen la integración por partes. Finalmente, se deben socializar las respuestas dadas a cada uno de los ejercicios y en la medida de lo posible, el docente debe direccionar a los estudiantes	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		para que ellos mismos reconozcan si sus procedimientos fueron correcta o incorrectamente realizados. Con las consignas anteriores, el docente debe fortalecer en los estudiantes el reconocimiento de los siguientes aspectos: • La diferenciación y la integración son procesos inversos. • La antiderivada de una función no es explicita. • Ejercitación del uso del método de integración por partes.	
Tarea	**Tarea**	Para cada una de las funciones $f(x) = xcos(x)$, $g(x) = x^2cos(x)$ responder los siguientes enunciados: • ¿Cuál es la antiderivada de $f(x)$ (o $g(x)$)? Si para la función $f(x)$ (o $g(x)$) la antiderivada no es explícita, responder: • Halla *u,v, du* y *dv*. • Utilizando la fórmula de integración por partes halla la integral de *f* y *g*. • Comprueba que la antiderivada de la función es correcta. Finalmente, aborda las siguientes consignas: • Elabora una tabla comparativa entre los métodos de integración que conoces. • Indaga en relación a las limitaciones que puede tener el método de integración por partes. • Indaga en relación a las aplicaciones que pueda tener el método de integración por partes en un campo que sea de tu interés	