Grado 11

Matematicas - Unidad 4

¿Cómo hallo el área de superficies curvas? Bienvenidos al cálculo integral

Tema

Interpretación de la integral como área bajo la curva.

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

La obtención de áreas en la historia ha estado ligada durante mucho tiempo a conocer las dimensiones de los lados en los objetos que se miden, pero cuando se trata de curvas y de figuras curvas, su obtención cobra otro significado. El área bajo dichas curvas es posible por medio de la integración por partes y más cuando no es posible de forma directa. De ahí que haya "...Una vaca vestida de Uniforme".

Actividad Introductoria: ¿Cómo se integra?

Con base en el video que te presenta tu docente, responde de manera individual las siguientes preguntas. Luego socializaremos algunas respuestas con el resto de la clase.

1. ¿Qué es integrar?

2. ¿Qué se debe tener presente, para lograr un proceso de integración?

3. ¿Qué relación se puede establecer entre la integración en la vida cotidiana y la integración en matemáticas?

Lee atentamente la siguiente información que se presenta:

La anti-derivada es también conocida como integral indefinida, y es porque no tiene valores que acoten su integración pero si tiene un valor constante C.

La expresión no es una función particular, sino que es la generalización de un grupo de funciones que describen muchas opciones de respuestas, puesto que al darle valores a C, cambia la función resultante.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Para que una expresión sea considerada antiderivada debe cumplir que:

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

Tomemos un ejemplo:

$$\int \frac{3x}{(x+6)}\, dx \quad ; \text{ elegimos a } m = x + 6$$

Por lo que tendríamos que sustituir a $x+6$ por m en la integral inicial.

$$\int \frac{3x}{(x+6)}\, dx = \int \frac{3x}{m}\, dm$$

Al tener ya parte de la integral con la letra m, debemos sustituir la x que queda en términos de m.

$$\int \frac{3x}{(x+6)}\, dx = \int \frac{3x}{m}\, dm = \int \frac{3(m-6)}{m}\, dm$$

Esto al despejar a x en $m = x + 6$. Que fue el cambio inicial elegido.

$$\int \frac{3m - 18}{m}\, dm = \int \left(\frac{3m}{m} - \frac{18}{m} \right) dm$$

Expresamos la integral como una integral directa simplificando y organizando los términos en función de m.

$$\int \frac{3x}{(x+6)}\, dx = \int \frac{3x}{m}\, dm = \int \frac{3(m-6)}{m}\, dm$$

$$\int \left(\frac{3m}{m} - \frac{18}{m} \right) dm = \int 3dm - \int 18\, m^{-1}\, dm$$

Siendo estos valores resultantes

$$3m - 18 \, Ln\,(m) + C$$

Pero como tenemos expresada la integral en términos de m, y debemos de expresarla en términos de x, pues debe dar cuenta de la integral inicial.

Reemplazamos $m = x + 6$

$$3m - 18\, Ln\,(m) + C = 3\,(x + 6) - 18\, Ln\,(x + 6) + C$$

$$\int \frac{3x}{(x+6)}\, dx = 3(x + 6) - 18\, Ln\,(x + 6) + C$$

Ahora, con base en el repaso anterior, responde de manera individual en tu material del estudiante la siguiente pregunta que luego será socializada con el resto de la clase.

- ¿Existen funciones, que no se pueden integrar por medio de los métodos recordados?

Objetivos

» Hacer uso de algunas estrategias aplicadas en el método de integración por partes para determinar la integral de una función.

» Identificar el método de integración por partes como estrategia para integrar funciones compuestas.

Actividad 1: ¿Cómo integro esta función?

Con base en lo visto en el repaso de la introducción, de manera individual responde las siguientes preguntas y consignas. Luego socializaremos las respuestas.

$$h(x) = xe^{x}$$

1. ¿Cuál es la antiderivada de $f(x)$?

2. Hallar la derivada de $h(x)$

Recuerda la condición para comprobar la antiderivada resultante, debe cumplirse que:

Sí al integrar la función $f(x)$, se obtiene una función $F(x)+c$, donde $c \in R$ tal que al derivarse resulta la función inicial $f(x)$, es decir, si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, entonces $(F(x)+c)' = f(x)$.

Esto debido a que la derivación y la integración son procesos inversos. En este caso, $h(x) = xe^{x}$, siendo su primera derivada:

$$h'(x) = e^{x} + xe^{x}$$

Con base en lo visto hasta el momento, y de acuerdo a la siguiente expresión resuelve en tu material del estudiante la siguiente pregunta y consigna.

$$h(x) = xe^{x}$$

1. ¿Es posible hallar la integral de $h(x) = xe^{x}$?

   Si ¿Cómo?

   No ¿Por qué?

2. Halla la integral de $h'(x) = e^{x} + xe^{x}$

Revisa el siguiente procedimiento de integración de la función y relaciónalo con lo que se te solicita.

El hallar la integral de una expresión requiere identificar la función que se tiene:

$$xe^{x} = h'(x) - e^{x}$$

Se debe integrar cada uno de los términos que hay en la expresión con respecto a dx

$$\int xe^{x}\, dx = \int h'(x) - \int e^{x}\, dx$$

Como al integrar la derivada de una función da como resultado la función inicial obtenemos a h(x) más una constante C

$$\int xe^{x}\, dx = h(x) + c - \int e^{x}\, dx$$

Donde c es una constante perteneciente a R.

$$\int xe^{x}\, dx = h(x) - \int e^{x}\, dx + c$$

Ahora, con base en lo anterior es posible ver la integral de h(x) como:

$$\int xe^{x}\, dx = xe^{x} - \int e^{x}\, dx + c$$

Considerando la función $h(x) = f(x)\, g'(x)$, calcula su integral por medio de la derivada del producto $f(x)\, g(x)$.

Al término del anterior procedimiento, has de tener la siguiente expresión:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx + c$$

A la fórmula anterior se denomina Integración por partes, y poniendo u=f(x) y v=g(x), se tiene du=f^' (x)dx y dv=g^' (x)dx y se obtiene la fórmula:

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

Actividad 1: Formulando y reconociendo

De acuerdo a lo visto hasta el momento en clase, resuelve la siguiente consigna de manera individual.

1. Halla la integral por partes de f(x)=lnx con respecto a x haciendo uso del a fórmula de integración por partes.

Recuerda, para hallar la integral por partes:

- Se deriva u para encontrar du.
- dv es el factor más complicado que se puede integrar facilmete.
- La antiderivada $v = \int dv$ debe ser fácil de determinar.
- La nueva integral $\int v\,du$ debe ser más fácil de calcular que la integral original $\int duv$.

Observa el procedimiento y compáralo con el tuyo desarrollado para el literal anterior.

Como la integral que se quiere hallar de la función $f(x)$ es la integral por partes:

$$\int lnx\,dx$$

Sabemos que hay dos funciones en la expresión anterior: una implícita y otra explícita; por lo que se debe usar la fórmula:

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

Debes identificar cuál es la función u y v donde:

$$u = lnx \quad y \quad dv = dx$$

Porque du se puede calcular y como no hay más términos para dv, se tiene que dv=dx

De ahí que $du = \frac{1}{x}dx \quad y \quad v = x$

En este punto, hacemos uso de la ecuación de integración por partes y reemplazamos los datos en la ecuación general.

$$\int udv = uv - \int vdu + c = \int lnxdx = xlnx - \int x * \frac{1}{x} + c$$

$$\int lnxdx = xlnx - x + c$$

Comprobación:

Para comprobar si el procedimiento de integración por partes es correcto, debes derivar la antiderivada que obtuviste por medio de la derivada de un producto.

$$F(x) = xlnx - x + c$$

$$F'(c) = lnx + x * \frac{1}{x} + 0 = lnx + 1 - 1 + 0 \Longrightarrow f(x) = lnx$$

Con base en lo visto hasta el momento, haciendo uso de la ecuación de la integración por partes, de manera individual responde la siguiente consigna. Luego cuando tu docente te lo indique comparte tu respuesta con el resto de la clase.

- Haciendo uso de las letras que tiene la fórmula que permite la integración por partes, inventa una frase que sea fácil de recordar para ti. (U,D,V,U,V,V,D,U) Puedes integrar otras palabras que den sentido a tu frase.

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

Para finalizar la actividad, resuelve la siguiente consigna registrando tus hallazgos.

- Consulta en la web o en textos, si existen otras frases que sean de gran difusión y hagan alusión a la fórmula de integración por partes.

Resumen

En compañía de tres de tus compañeros de clase, responde las siguientes consignas.

1. ¿Cómo se determina, si una función es integrable por el método de integración por partes?

2. ¿Cuáles consideras que son los criterios para escoger u y v?

3. Escoge cinco palabras claves respecto al tema trabajado y con ellas realiza un resumen referente a la integración por partes en el Material del Estudiante.

De acuerdo a lo visto en la clase, desarrolla la integración por partes de las siguientes funciones. Cuando tu docente te lo indique comparte los resultados con el resto de la clase.

a. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

b. $\int x^3 \cos x dx$

c. $\int \frac{Inx}{x^3} dx$

d. $\int 3^x cosxdx$

e. $\int senx^2 \ dx$

Tarea

Con base en lo trabajado en la clase y las diferentes actividades realiza las siguientes consignas de manera individual.

1. Indaga en relación a las limitaciones que pueda tener el método desarrollado por Riemann para la determinación de áreas.

2. Consulta algunas aplicaciones de gran trascendencia que haya tenido el método desarrollado por Riemann.

3. Indaga en relación a la existencia de otros métodos que permitan la determinación del área de figuras curvas.

4. Elabora una tabla comparativa entre dos métodos que permitan determina el área de figuras curvas, resaltando las ventajas o desventajas que puedan tener estos.

Método de obtención de áreas	Ventajas	Desventajas